

Разнобой по графам

1. Существует ли граф, состоящий из 2021 вершины, такой, что при удалении любого ребра он распадается ровно на 2 компонента связности?
2. В кафе с кошками заходили посетители и гладили кошек. Каждый посетитель погладил 5 кошек, и каждую кошку погладили 10 раз. Докажите, что посетителей было в два раза больше, чем кошек.
3. У Пети 5 друзей среди одноклассников. У остальных его одноклассников 4, 6 или 8 друзей. И только у новичка Саши всего один друг. Докажите, что Петя может отправить Саше записку, если каждый будет передавать записку одному из своих друзей.
4. На балу было 30 девушек и 30 мужчин. После бала оказалось, что все юноши станцевали с одинаковым количеством девушек, а Маша станцевала с 15 юношами. Покажите, что найдутся две девушки, станцевавшие с равным числом юношей.
5. Докажите, что в связном графе любые две простые цепи максимальной длины имеют общую вершину.
6. Пусть a – наименьшая из степеней вершин в графе. Докажите, что в графе существует несампересекающийся путь длины хотя бы a .
7. В классе есть 5 задира, а остальные – молчуны. Молчуны никого не обижают. Каждый задира обижает не менее половины учеников класса. Докажите, что кого-либо из молчунов обижают более половины задир, если в классе всего 22 ученика.
8. В компании из n человек среди любых четверых есть знакомый с остальными тремя. Доказать, что есть человек, который знает всех остальных.