

Степень точки. Добавка (щадящая)

1. Через центр I вписанной в треугольник ABC окружности проведена прямая, перпендикулярная прямой AI и пересекающая прямую BC в точке M . Из точки I на прямую AM опущен перпендикуляр ID . Докажите, что точки A, B, C и D лежат на одной окружности.
2. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках M и N . Докажите, что если вершины A и C некоторого прямоугольника $ABCD$ лежат на окружности ω_1 , а вершины B и D — на окружности ω_2 , то точка пересечения диагоналей прямоугольника лежит на прямой MN .
3. Биссектриса AD треугольника ABC пересекает его описанную окружность в точке T . Пусть ω — окружность с центром в точке T и радиусом TC . Прямая ℓ , проходящая через точку D , пересекает ω в точках K и N . Докажите, что $\angle KAD = \angle NAD$.
4. Дан остроугольный треугольник ABC . Точки M и N — середины сторон AB и BC соответственно, точка H — основание высоты, опущенной из вершины B . Описанные окружности треугольников AHN и CHM пересекаются в точке P ($P \neq H$). Докажите, что прямая PH проходит через середину отрезка MN .