Степень точки

Определение. Степенью точки P относительно окружности ω с центром O и радиусом R называют величину $deg(P, \omega) = OP^2 - R^2$

1. **(a)** В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке P. Докажите, что если четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, то $PA \cdot PC = PB \cdot PD$.

(b) Даны окружность ω и точка P внеокружности. Через точку P проведены две прямые, первая пересекает окружность в точках A и B, а вторая — в точках C и D. Докажите, что $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.

(c) Докажите, что условия на отрезки из пунктов $a), b)$ являются **необходимыми** для вписанности $ABCD$.

(d) Докажите, что если $ABCD$ вписанный, то для точки P из предыдущих пунктов верно:

$$PA \cdot PC = |\deg(P, \omega)|$$

Мораль:
- Степень точки можно считать как секущую на ее внешнюю часть, если точка снаружи окружности;
- Степень точки можно считать как произведение отрезков, на которые точка разбивает хорду, если точка лежит внутри;
- С помощью степеней можно доказывать вписанность четырехугольников.

2. Доказать, что, если на основании AC равнобедренного треугольника ABC взять произвольную точку M, то $BC^2 - BM^2 = AM \cdot CM$.

3. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) проведена биссектриса AM. На луче CA отложен отрезок CN, равный BM. Докажите, что точки A, B, M и N лежат на одной окружности.

4. (**Важная!**) Докажите, что степень точки, лежащей вне окружности, равна квадрату длины отрезка касательной, проведенной из точки к окружности.

Мораль:
Если степень точки P равна XP^2, где точка X лежит на окружности, то PX — касательная.

5. Две окружности пересекаются в точках A и B. Докажите, что прямая AB делит пополам отрезок общей внешней касательной к окружностям.

6. В параллелограмме $ABCD$ диагональ AC больше диагонали BD; M — такая точка диагонали AC, что четырёхугольник $BCDM$ вписанный. Докажите, что прямая BD является общей касательной к описанным окружностям треугольников ABM и ADM.

7. Даны окружность S и точки A и B вне её. Для каждой прямой ℓ, проходящей через точку A и пересекающей окружность S в точках M и N, рассмотрим описанную окружность треугольника BMN. Докажите, что все эти окружности имеют общую точку, отличную от точки B.