Алгебраический разнобой

1. Докажите, что любое нечетное число представляется в виде разности квадратов целых чисел.

2. Числа a и b — два последовательных натуральных числа, а c — их произведение. Докажите, что $a^2 + b^2 + c^2$ является квадратом нечётного числа.

3. Пусть a, b, c – такие целые числа, что $(a+b+c)^2 = -(ab+ac+bc)$ и числа $a+b$, $b+c$, $a+c$ не равны 0. Докажите, что произведение любых двух из чисел $a+b$, $a+c$, $b+c$ делится на третье.

Иногда полезно не просто приводить выражение к указанному виду, но еще и подумать, чего будет достаточно, чтобы доказать задачу.

4. Найдите все натуральные числа n, для которых число $n^7 + n^6 + n^5 + 1$ имеет ровно три натуральных делителя.

5. Докажите, что если к произведению четырех последовательных чисел прибавить единицу, то получится точный квадрат.

6. Докажите, что число $n^4 + 4$ – составное для любого $n > 1$.

Иногда выражение большое, и сложно разложить его на множители привычными методами. Тем не менее, попробуйте угадать разложение, исходя из того, что вам нужно доказать.

7. Известно, что $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$. Докажите, что среди a, b и c есть 2 числа, в сумме дающие 0.

8. На доске записаны 5 различных чисел. Даша вычислила всевозможные произведения нескольких записанных чисел, взятых в нечетном количестве (по 1, по 3, по 5), сложила все эти произведения и полученную сумму записала на листок. Максим сделал почти тоже самое: он брал произведения из четного количества чисел (по 2 и по 4) и тоже выписал их сумму на свой листок. Оказалось, что у Даши число на 1 больше, чем у Максима. Докажите, что одно из чисел, выписанных на доске, равно 1.

9. Учитель написал на доске 10 отрицательных целых чисел. Вася переписал в тетрадь эти числа, затем записал туда же всевозможные их попарные произведения, всевозможные произведения трёх, четырёх, ..., девяти из этих чисел и, наконец, произведение всех десяти чисел. Оказалось, что сумма всех записанных Васей чисел отрицательна. Чему она могла быть равна?