

Хороводы

Важный прием в графах – это идти, идти, идти по ребрам, пока не случится что-то плохое.

- (а)** В графе из каждой вершины входит и выходит по одному ребру. Покажите, что этот граф – объединение ориентированных циклов.

(б) Лемма о хороводах. В графе каждой вершина имеет степень 2. Покажите, что этот граф – объединение непересекающихся циклов.
- В ориентированном графе 200 вершин, причем из каждой исходит ровно одно ребро и входит ровно одно ребро. Докажите, что можно провести не более 100 новых ребер так, чтобы граф стал сильно связным (то есть из каждой вершины можно было бы попасть по стрелкам в любую другую).
- (а)** У каждого джентльмена города М у каждого есть ровно два неприятеля среди других джентльменов. Покажите, что джентльменов всегда можно разбить на 3 общества так, чтобы в каждом обществе никто не враждовал.

(б) У каждого джентльмена ровно 1 неприятель и ровно 1 друг. Докажите, что тогда можно разбить джентльменов на 2 общества, где внутри которых нет вражды и дружбы.
- На кружке 20 школьникам было предложено 20 задач. Каждый школьник решил две задачи и каждую задачу решили ровно двое из них. Докажите, что можно так организовать разбор задач, чтобы каждый школьник рассказал одну задачу и все задачи были разобраны.
- (а)** У Вани есть 40 конфет 20 видов, по две конфеты каждого вида. Ваня достал 20 коробочек и положил по 2 конфеты в каждую коробочку. Докажите, что он может достать по одной конфете из каждой коробочки так, чтобы все конфеты были разными.

(б) Докажите, что количество этих способов – какая-то степень двойки.
- В однокруговом турнире каждый участник играет не более одной игры в день, но по окончании должна сыграть с каждой другой командой один раз. После нескольких дней турнира организаторы заметили интересный факт: любых 5 участников можно так посадить за круглый стол, что каждый из них уже играл с соседями. Докажите, что в таком случае организаторы могут так придумать расписание игр, что турнир завершится через 3 дня.
- Выбежав после уроков на двор, каждый школьник кинул снежком ровно в одного другого школьника. Докажите, что всех учащихся можно разбить на три команды так, что члены одной команды друг в друга снежками не кидали.