

## Защикливание

**Определение.** Последовательность  $a_1, a_2, \dots, a_k \dots$  называется **периодической** с периодом  $T$ , если  $a_n = a_{T+n}$  для всех  $n$ . Может случиться, что правило не действует для нескольких первых членов, начиная действовать с  $n = k$ . Тогда начало последовательности  $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}$  называется **предпериодом**.

1. Может ли сумма двух последовательностей с предпериодами быть периодической последовательностью без предпериода?
2. Оставим в периодической последовательности  $a_1, a_2, \dots, a_k \dots$  только члены вида  $a_{N+d}, a_{N+2d}, \dots, a_{N+kd} \dots$  (для некоторых натуральных  $N$  и  $d$ ). Докажите, что снова получится периодическая последовательность.

**Если состояний конечно, то рано или поздно все повторится...**

**Если предыдущее состояние однозначно восстанавливается, есть ли предпериод?**

3. Кубик Рубика выведен из первоначального состояния некоторой комбинацией поворотов. Докажите, что всегда можно вернуть его в исходное состояние, выполнив эту комбинацию еще несколько раз.
4. На полковом плацу нарисован прямоугольник  $1 \times 7$ , разбитый на 7 квадратов. В квадратах написаны числа от 1 до 7, но не обязательно по порядку. Старшина выстроил семерых солдат в шеренгу так, что каждый стоит в своем квадрате. По команде «Переставься!» каждый солдат переходит из своего квадрата в  $k$ -ый слева, где  $k$  — число, написанное в квадрате, где стоит солдат. Докажите, что начальное расположение солдат рано или поздно повторится.
5. В тридесятом королевстве у каждого замка и каждой развилки сходятся по три дороги. Рыцарь, Любящий Разнообразие, выехал из своего замка и по очереди поворачивает то направо, то налево. Докажите, что рано или поздно он придет к своему замку.
6. Рассмотрим числа Фибоначчи. ( $F_1 = 1, F_2 = 1, F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ ) и натуральное число  $K > 1$ .
  - (а) Покажите, что последовательность остатков при делении на  $K$  периодически без предпериода;
  - (б) Докажите, что в ней встретится число, кратное  $K$ ;
  - (в) Найдутся ли два числа, кратные  $K$ ?
7. Найдется ли непериодическая последовательность только из нулей и единиц?
8. Покажите, что число  $0, 123456 \dots 20192020 \dots$  — иррационально.