Квадратный трёхчлен

Сто су заплатил бы я математику, который при помощи алгебраического уравнения доказал бы мне существование ада.

Оноре де Бальзак

1. Докажите, что при любых ненулевых a, b, c хотя бы один из трехчленов $ax^2 + 2bx + c, bx^2 + 2cx + a, cx^2 + 2ax + b$ имеет корень.
2. Корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ в 666 раз больше корней квадратного уравнения $cx^2 + dx + a = 0$. Докажите, что $d^2 = b^2$.
3. Найдите все целые n, что $x^2 + nx + n = 0$ имеет целый корень.
4. Известно, что сумма любых двух из трёх квадратных трёхчленов $x^2 + ax + b$, $x^2 + cx + d$, $x^2 + ex + f$ не имеет корней. Может ли сумма всех этих трёхчленов иметь корни?
5. Числа a, b, c таковы, что для любого числа x верно
$$ax^2 + bx + c \geqslant bx^2 + cx + a \geqslant cx^2 + ax + b$$
Покажите, что $a = b = c$.
6. Коэффициенты ax^2+bx+c являются степенями двойки, а корни это трехчлена – целые. Докажите, что корни совпадают.
7. Три квадратных трехчлена $f(x), g(x), h(x)$ с положительными старшими коэффициентами таковы, что сумма любых двух из них имеет общий корень с оставшимся. Докажите, что все они имеют общий корень.
8. На доске написаны тринадцать приведённых квадратных трёхчленов:
$$x^2 + a_1x + b_1, x^2 + a_2x + b_2, \dots x^2 + a_{13}x + b_{13}.$$
Известно, что последовательности $a_1, a_2, \dots a_{13}$ и $b_1, b_2, \dots b_{13}$ — арифметические прогрессии. Оказалось, что сумма всех тринадцати трёхчленов имеет хотя бы один корень. Какое наибольшее количество исходных трёхчленов может не иметь корней?
9. Известно, что $f(x), g(x)$ и $h(x)$ — квадратные трёхчлены. Может ли уравнение $f(g(h(x))) = 0$ иметь корни
   (a) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9;
   (b) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10;
   (c) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8?