Разнобой по ТЧ

Вспоминаем:

- **Малая Теорема Ферма:** для простого p и числа a, некратного p выполнено:

$$a^{p-1} \underset{p}{\equiv} 1;$$

- **Теорема Вильсона:** для простого p верно $(p-1)! \underset{p}{\equiv} -1$.

1. Докажите, что число $3\underbrace{99\ldots99}_{k}1$ не может быть простым при нечетных k.

2. Докажите, что при натуральных $n \neq m$ числа 2^n и 2^m имеют различные наборы цифр.

3. При каких натуральных n число $n^2 - 1$ является степенью простого числа?

4. Найти все такие простые числа p, что $p^6 + 6$ – тоже простое.

5. Пусть a и b – натуральные числа. Известно, что $a^2 + b^2$ делится на ab. Докажите, что $a = b$.

6. Докажите, что ни при каком целом k число $k^2 + k + 1$ не делится на 89.

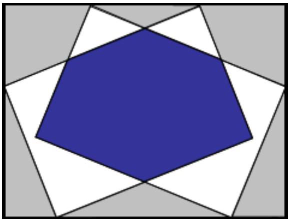
7. Натуральные числа x и y таковы, что $3x^2 + x = 4y^2 + y$. Докажите, что число $(x - y)$ — квадрат натурального числа.

8. Найдите все такие числа n, что

$$\text{НОК}(n, 5!) = 5 \cdot \text{НОД}(10!, n).$$

Теорема о линолеуме

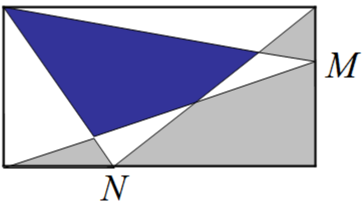
Внутри прямоугольника 3×4 расположены два прямоугольника размера 2×3. Что больше: сумма площадей серых многоугольников или площадь синего многоугольника?



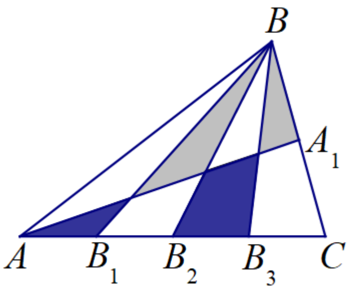
Теорема о линолеуме. Несколько кусков линолеума лежат на полу комнаты. При этом каждая точка пола покрыта линолеумом не более, чем в два слоя. Тогда площадь пола, покрытая дважды, равна площади, не покрытой ни разу, тогда и только тогда, когда общая площадь линолеума равна площади комнаты.

Далее в задачах 1-7 нужно доказать, что синяя площадь равна серой.

1.

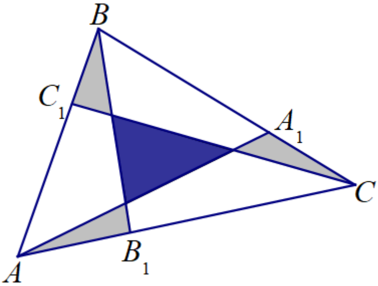


2.



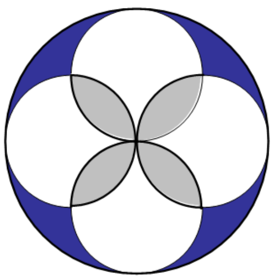
A_1 — середина BC; B_1, B_2 и B_3 делят AC на четыре равных отрезка.

3.

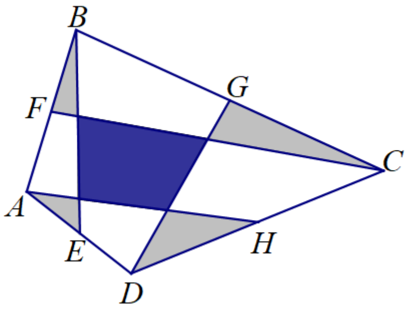


Точки A_1, B_1, C_1 делят стороны BC, AC, AB в отношении $2 : 1$.

4.

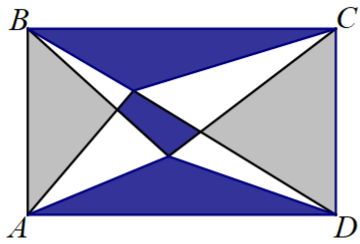


5.

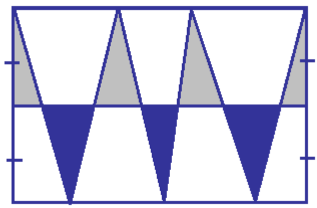


Точки E, F, G, H являются серединами сторон AB, BC, CD, DA.

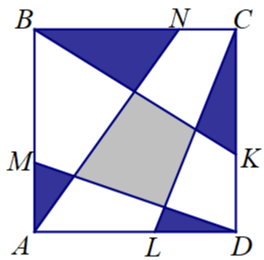
6.



7.



8. Квадрат со стороной a. Площади серой и синей частей равны. Докажите, что $AM + BN + CK + DL = 2a$.



9. На картинке диагонали шестиугольника пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся пополам. Доказать, что черная площадь равна серой.