

## Подвешивание за вершину

Несчастливая Россия: повесить и то не умеют.

Александр Дюма

1. В стране некоторые города соединены авиалиниями, причём из города А в город В нельзя попасть, сделав менее десяти пересадок. Докажите, что все авиалинии можно распродать 11 авиакомпаниям таким образом, что любой маршрут из А в В будет проходить по линиям, принадлежащим всем 11 компаниям.
2. Степень всех вершин графа не меньше  $n$ , причём в нём нет циклов, меньше чем на 6 вершинах. Докажите, что в нём найдутся  $n^2 - n$  вершин, никакие две из которых не смежны.
3. В графе степени всех вершин равны 3 и между любыми двумя вершинами существует путь длиной не более 2. Какое наибольшее число вершин может быть в этом графе?
4. В цветочном городе живёт некоторое число коротышек. В первый день один из них заболел. Если коротышка болеет, то к нему приходят все его здоровые друзья и заражаются (то есть становятся больными в следующий день). Если коротышка один день болел, то он выздоравливает на следующий день, и более того, получает иммунитет на этот день. Коротышка с иммунитетом может навещать друзей без риска заражения. Может ли так случиться, что эпидемия будет продолжаться бесконечно долго?
5. Есть несколько точек, некоторые из которых соединены дугами так, что из любой точки в любую другую можно добраться по этим дугам. Докажите, что на любой дуге можно поставить синюю и красную стрелки в противоположных направлениях так, чтобы из любой точки в любую можно было пройти таким путем, на котором цвет стрелки меняется не более одного раза. Идти при этом разрешается только в направлении, указываемом стрелкой какого-либо цвета.
6. В стране (а) 121 город; (б) 120 городов, некоторые пары городов соединены дорогами. Из каждого города выходит хотя бы три дороги. Докажите, что существует несамопересекающийся циклический маршрут, состоящий не более, чем из 11 городов.