

## Отрезки касательных

- Рассмотрим прямоугольный треугольник  $ABC$ , где  $AB$  - гипотенуза. Пусть  $I$  — центр вписанной окружности, а  $A_1, B_1, C_1$  — её точки касания со сторонами  $BC, AC, AB$  соответственно. Докажите, что:
  - Четырёхугольник  $CB_1IA_1$  — квадрат.
  - $r = \frac{a+b-c}{2}$ , где  $r$  — радиус вписанной окружности,  $a, b$  и  $c$  — длины сторон  $BC, AC$  и  $AB$  соответственно.
- В шестиугольнике, описанном около окружности, даны пять последовательных сторон —  $a, b, c, d, e$ . Найдите шестую сторону.
- Точка  $D$  — середина гипотенузы  $AB$  прямоугольного треугольника  $ABC$ . Окружность, вписанная в треугольник  $ACD$ , касается отрезка  $CD$  в его середине. Найдите острые углы треугольника  $ABC$ .
- Пусть в четырёхугольнике  $ABCD$  лучи  $AB$  и  $DC$  пересекаются в точке  $P$ , а лучи  $CB$  и  $DA$  пересекаются в точке  $Q$ . Докажите, что если в четырёхугольнике  $ABCD$  можно вписать окружность, тогда
  - $AB + CD = BC + AD$ ;
  - $PB + DQ = QB + PD$ ;
  - $PA + AQ = PC + CQ$ .
- В треугольнике  $ABC$  внеписанная окружность касается стороны  $BC$  в точке  $M$ , а продолжений сторон  $AB$  и  $AC$  — в точках  $P$  и  $Q$  соответственно. Вписанная окружность треугольника  $ABC$  касается стороны  $BC$  в точке  $K$ , а стороны  $AB$  — в точке  $L$ . Докажите, что:
  - отрезок  $AP$  равен полупериметру  $p$  треугольника  $ABC$ ;
  - $BM = CK$ ;
  - $BC = PL$ .
- Центры  $O_1, O_2, O_3$  трех непересекающихся окружностей одинакового радиуса расположены в вершинах треугольника. Из точек  $O_1, O_2$  и  $O_3$  проведены касательные к данным окружностям так, как показано на рисунке. Известно, что эти касательные, пересекаясь, образовали выпуклый шестиугольник. Докажите, что сумма отрезков, взятых через один равна сумме длин оставшихся трёх отрезков.

