Вспоминаем индукцию

Метод математической индукции. Пусть имеется последовательность утверждений $A_1, A_2, \ldots$ И пусть первое утверждение A_1 верно, и мы умеем доказывать, что из утверждения A_n следует утверждение A_{n+1}. Тогда все утверждения в этой последовательности верны.

Базой индукции называется утверждение A_1. Иногда базой индукции называют несколько первых утверждений $A_1, A_2, \ldots, A_k$, но чаще всего база индукции — это только первое утверждение.
Предположением индукции называется предположение о том, что утверждение Y_n верно для $n = k$.
Шагом индукции (переходом индукции) называется доказательство того, что из утверждения Y_k следует утверждение Y_{k+1}.

Алгебра

Докажите тождества методом математической индукции.

1.
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

2.
$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} = 1 - \frac{1}{n}.$$

3.
$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \ldots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$$

4.
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2.$$

5. Пусть x — такое, что $x + \frac{1}{x}$ — целое. Докажите, что $x^n + \frac{1}{x^n}$ — целое для любого натурального n.

Теория чисел

6. Доказать, что сумма кубов трех последовательных натуральных чисел делится на 9.

7. Доказать, что все числа вида 10017, 100117, 1001117, ... делятся на 53.

8. Доказать, что при любом натуральном n число $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ делится на 7.

9. Числа вида $F_n = 2^{2^n} + 1$ называются числами Ферма. Докажите, что десятичная запись числа F_n при $n \geqslant 2$ оканчивается цифрой 7.