Вспоминаем индукцию

Метод математической индукции. Пусть имеется последовательность утверждений $A_1, A_2, \ldots$ И пусть первое утверждение A_1 верно, и мы умеем доказывать, что из утверждения A_n следует утверждение A_{n+1}. Тогда все утверждения в этой последовательности верны.

Базой индукции называется утверждение A_1. Иногда базой индукции называют несколько первых утверждений $A_1, A_2, \ldots, A_k$, но чаще всего база индукции — это только первое утверждение.
Предположением индукции называется предположение о том, что утверждение Y_n верно для $n = k$.
Шагом индукции (переходом индукции) называется доказательство того, что из утверждения Y_k следует утверждение Y_{k+1}.

Алгебра

Докажите тождества методом математической индукции.

0.
$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

1.
$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$$

2.
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

3.
$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + (n-1) \cdot n = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}.$$

4.
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

5.
$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} = 1 - \frac{1}{n}.$$

6.
$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \ldots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$$

7.
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2.$$