

## Неравенства

Для любого числа  $x$  верно неравенство  $x^2 \geq 0$ .

$\frac{a+b}{2}$  — среднее арифметическое двух чисел.  $\sqrt{ab}$  — среднее геометрическое ( $a, b \geq 0$ ).

**Неравенство Коши** (или неравенство о средних):  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ , при  $a, b \geq 0$

1. Докажите неравенства:

(a)  $\frac{x^2 + y^2}{2} \geq xy$  при любых  $x, y$

(b)  $x + \frac{1}{x} \geq 2$  при  $x \geq 0$

(c)  $2(x^2 + y^2) \geq (x + y)^2$  при любых  $x, y$

(d) Докажите, что  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$  при  $x, y > 0$

(e)  $1 + x \geq 2\sqrt{x}$  при  $x \geq 0$

**Свойства неравенств:** Неравенства можно складывать и для положительных чисел перемножать.

Если  $a > b$  и  $c > d$ , то  $a + c > b + d$ .

Если  $a, b, c, d \geq 0$ ,  $a > b$  и  $c > d$ , то  $ac > bd$ .

*Пример.* Докажите неравенство:  $x^2 + 2xy + 2y^2 + 2y + 1 \geq 0$ .

Представим левую часть в виде  $(x + y)^2 + (y + 1)^2$ . Заметим, что  $(x + y)^2 \geq 0$  и  $(y + 1)^2 \geq 0$ , сложив данные неравенства получаем требуемое.

2. Докажите неравенства:

(a)  $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \geq 2xy + 2xz + 2yz$  при любых  $x, y, z$

(b)  $(a^2 + b^2)(a^2 + c^2)(b^2 + c^2) \geq 8a^2b^2c^2$  при  $a, b, c \geq 0$

(c)  $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$  при любых  $x, y$

(d)  $\frac{ab}{c} + \frac{ac}{b} + \frac{bc}{a} \geq a + b + c$  при  $a, b, c \geq 0$

(e)  $(ab + bc + ca)^2 \geq 3abc(a + b + c)$  при  $a, b, c \geq 0$

(f)  $ab + bc + ca \geq a\sqrt{bc} + b\sqrt{ca} + c\sqrt{ab}$  при  $a, b, c \geq 0$

(g)  $\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^2 \geq \frac{xy+yz+xz}{3}$  при любых  $x, y, z > 0$