

## Всё ещё остатки

### Перебор остатков

1. Разность двух целых чисел умножили на их сумму и на их произведение. Докажите, что получившееся число делится на 3.
2. (a) Докажите, что  $n^3 + 2$  не делится на 9 ни при каком натуральном  $n$ .  
(b) Докажите, что  $n^3 + 2n$  делится на 3 для любого натурального  $n$ .  
(c) Докажите, что  $n^5 + 4n$  делится на 5 при любом натуральном  $n$ .
3. К клетчатому квадрату добавили одну клетку. Докажите, что его нельзя разрезать на фигурки в виде буквы Г из 4 клеток.
4. (a)  $p, p + 3$  – простые числа. Найдите все возможные значения  $p$  и докажите, что других вариантов нет.  
(b) и  $8^2 + 1$  – простые числа. Найдите все возможные значения  $p$  и докажите, что других вариантов нет.

### Отрицательные помогают

5. Докажите, что  $30^{99} + 61^{100}$  делится на 31.
6. Докажите, что при любом натуральном  $n$  хотя бы одно из чисел  $7^n - 4^n$  и  $7^n + 4^n$  делится на 11.
7. Докажите, что  $11^{2021} + 12^{2021} + 13^{2021} + \dots + 40^{2021}$  делится на 51.
8. Докажите, что число  $2020!! - 2019!!$  делится на 2021. Здесь  $2020!!$  — произведение всех чётных натуральных чисел, не превосходящих 2020, а  $2019!!$  — произведение всех нечётных натуральных чисел, не превосходящих 2019.