

Запусти процесс

Запуская процесс, можно «по цепочке» распространить свойство.

1. В последовательности целых чисел каждый член (кроме первого) на 12 больше суммы двух своих соседей. 20-й член равен 2020. Докажите, что в последовательности нет двух соседних членов кратных 18.

Можно построить необходимую конструкцию, постепенно добавляя элементы по какому-то правилу.

2. Докажите, что в любом графе можно выкинуть не более половины его ребер так, чтобы граф стал двудольным.
3. Докажите, что 40 детей можно разбить на группки по два или три человека, чтобы в каждой группе каждый был знаком с каждым.

Иногда полезно находить величину, которая меняется в одну сторону при вашем процессе (при улучшениях конструкции, например) — **полуинвариант**. Если эта величина не может так изменяться бесконечно — значит, процесс когда-нибудь остановится.

4. Ученики школы посещают кружки. Докажите, что можно несколько школьников принять в пионеры так, чтобы в каждом кружке был хотя бы один пионер и для любого пионера нашелся кружок, в котором он был бы единственным пионером.
5. По окружности расставлены n натуральных чисел. Между каждыми двумя соседними числами записывают их наибольший общий делитель. После этого исходные числа стирают, а с оставшимися проделывают то же самое. Докажите, что через несколько шагов все числа станут равными.
6. На окружности расставлено несколько положительных чисел, каждое из которых не больше 1. Докажите, что можно разделить окружность на три дуги так, что суммы чисел на соседних дугах будут отличаться не больше чем на 1. (Если на дуге нет чисел, то сумма на ней считается равной нулю.)