Алгоритм Евклида

Алгоритм Евклида — способ найти НОД двух натуральных чисел, последовательно заменяя пару исходных чисел на пару из меньшего числа и остатка от деления большего на меньшее.

$$\begin{array}{ccccccccc} a & = & b & \cdot & q_1 & + & r_1 \\ b & = & r_1 & \cdot & q_2 & + & r_2 \\ r_1 & = & r_2 & \cdot & q_3 & + & r_3 \\ & \dots & & & & & \\ r_{n-1} & = & r_n & \cdot & q_{n+1} & + & r_{n+1} \\ r_n & = & r_{n+1} & \cdot & q_{n+2} & + & 0 \end{array}$$

1. Докажите, что $(a, b) = (a - k \cdot b, b)$, где k – целое. В частности, $(a, b) = (a - b, b)$.

2. Докажите, используя 1 задачу, что алгоритм Евклида действительно находит НОД двух чисел, то есть что $(a, b) = r_{n+1}$.

Практический блок – надо пользоваться 1, 2, 3

3. На столе лежит клетчатая шоколадка 56×12. Каждую минуту от неё отламывают квадратик наибольшего возможного размера и кладут в тарелку. Какая сторона будет у самого маленького квадратика в тарелке?

4. Найдите: **(a)** $(451, 287)$; **(b)** $(\underbrace{11\dots1}_{451}, \underbrace{11\dots1}_{287})$; **(c)** $(2^{451} - 1, 2^{287} - 1)$.

5. **(a)** Найдите $(12n + 1, 30n + 2)$.
   (b) Чему может быть равен $(30n + 5, 11n + 1)$?
   (c) Докажите, что $(5a + 3b, 13a + 8b) = (a, b)$.

6. Есть карандаш два угольника (с углами a° и b°), где a, b – взаимнопростые натуральные числа. Как с их помощью построить угол 5°?

7. На доске записаны два числа: 36 и 25. Алиса и Олег играют в игру, Алиса начинает. За один ход можно выписать на доску модуль разности каких-нибудь двух чисел, записанных на доске, если это число раньше не было выписано. Кто выигрывает при правильной игре?