Треугольник Паскаля

Треугольник Паскаля.

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
 & & & & & C_0^0 & & & & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & C_1^0 & & C_1^1 & & & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
C_4^0 & & & C_4^1 & & C_4^2 & & C_4^3 & & C_4^4 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & .
\end{array}
$$

1. Докажите, используя треугольник Паскаля: $C_{n+1}^{k+1} = C_n^{k+1} + C_n^k$.

2. **(a)** Докажите, что в треугольнике Паскаля сумма всех чисел в строке в два раза меньше, чем сумма чисел в следующей строке.
(b) Покажите, что $C_n^0 + C_n^1 + ... C_n^n = 2^n$.

3. Используя треугольник Паскаля, покажите, что:

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + ... = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + ...$$

4. **(a)** Встречается ли в треугольнике Паскаля число 2021?
(b) Покажите, что есть число, большее 1, встречающееся в треугольнике Паскаля хотя бы 4 раза.

5. Докажите, что каждое число A в треугольнике Паскаля равно сумме чисел предыдущей правой диагонали, начиная с самого левого вплоть до стоящего справа над числом A.

6. Докажите, что каждое число A в треугольнике Паскаля, уменьшенное на 1, равно сумме всех чисел, заполняющих параллелограмм, ограниченный теми правой и левой диагоналями, на пересечении которых стоит число A (сами эти диагонали в рассматриваемый параллелограмм не включаются).

7. В каких строках треугольника Паскаля все числа нечетные?