

Индукция в графах

1. Каждый Лорд обязан выбрать одну из 13 Тёмных сторон и дальше безприкословно служить ей. Любой Лорд враждует не более чем с 12 другими Лордами (вражда взаимна). Докажите, что Лорды могут выбрать Тёмные стороны так, чтобы никакие два враждующих Лорда не служили одной стороне.
2. В Средиземье некоторые (соседние) земли соединены дорогами. Докажите, что Гендальф может в каждый город назначить правителем эльфа или гнома так, чтобы на вопрос «есть ли гномы среди правителей соседних земель» все давали утвердительный ответ. Эльфы говорят только правду, а гномы всегда лгут.
3. В некоей вселенной каждый город соединен с любым другим дорогой с односторонним движением. Докажите, что Лорд Азриэл может прилететь в такой город, что из него можно добраться по дорогам в любой другой, проезжая по пути
 - (а) любое количество промежуточных городов;
 - (б) не более одного промежуточного города.
4. В компании из $k > 3$ английских лордов каждый написал новую поэму. При встрече английские лорды читают друг другу все известные им поэмы (и мгновенно учат). Докажите, что за $2k - 4$ встречи все они могут узнать все новые поэмы.
5. Рёбра дерева окрашены в два цвета. Звездный Лорд умеет перекрашивать все рёбра, ведущие из одной вершины, если они все одного цвета (иначе он запутается). Докажите, что Звездный Лорд может сделать дерево одноцветным.
6. В графе 2020 вершин. Докажите, что его рёбра можно покрасить в 1010 цветов так, чтобы не было циклического маршрута, в котором все рёбра покрашены в один цвет.
7. **Лемма Турана для треугольников.**

На пляже лежат n камней. Ральф рисует на песке линии, соединяющие эти камни. Ральф верит, что треугольники призывают Зверя, и не хочет, чтобы нашлись три булыжника, соединенные между собой. Докажите, максимальное количество линий, которые может провести Ральф, это $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$.

 - (а) Докажите эту задачу для четного $n = 2k$;
 - (б) Докажите эту задачу для нечетного $n = 2k + 1$.