Неравенства о средних для n переменных

Для любых положительных чисел a и b справедливы неравенства:

$$\sqrt{\frac{a_1^2+\ldots+a_n^2}{n}} \geqslant \frac{a_1+\ldots+a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1\cdot\ldots\cdot a_n} \geqslant \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{1}{a_n}},$$

каждое из неравенств обращается в равенство, только когда все переменные равны.

1. Докажите, что для положительных чисел выполнены неравенства:

(a) $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geqslant 3$;

(b) $\frac{1}{xyz}+x+y+z \geqslant 4$;

(c) $a^4+b^4+2c^2 \geqslant 4abc$.

2. Докажите, что для положительных чисел выполнено:

$$(x_1+\ldots+x_n)(\frac{1}{x_1}+\ldots+\frac{1}{x_n}) \geqslant n^2.$$

3. Докажите, что для положительных чисел выполнены неравенства:

(a) $\frac{a+b}{c}+\frac{a+c}{b}+\frac{c+b}{a} \geqslant 6$;

(b) $(\frac{a+2b}{c})^2+(\frac{c+2a}{b})^2+(\frac{b+2c}{a})^2 \geqslant 27$.

4. Докажите, что для положительных чисел верны неравенства:

(a) $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a} \geqslant \frac{9}{2(a+b+c)}$;

(b) $\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a} \geqslant \frac{3}{2}$.

5. Для вещественных чисел $x_0 > x_1 > \ldots > x_n$ докажите:

$$x_0+\frac{1}{x_0-x_1}+\frac{1}{x_1-x_2}+\ldots\frac{1}{x_{n-1}-x_n} \geqslant x_n+2n$$