Неравенства о средних, часть 2.

1. **(Неравенство о средних для 3 переменных)** Докажите, что:

$$\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc}$$

(a) Докажите **неравенство о средних для** $n = 2^k$ **переменных**:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

(b) Докажите неравенство выше для всех натуральных n.

Еще полезно складывать разные неравенства.
Например, $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ca$, потому что это сумма трех неравенств:
$\frac{a^2+b^2}{2} \geqslant ab$, $\frac{b^2+c^2}{2} \geqslant bc$, $\frac{c^2+a^2}{2} \geqslant ca$.

2. $x^2 + y^2 + 1 \geqslant xy + x + y$ при любых x, y.

3. Докажите неравенство $6a + 4b + 5c \geqslant 5\sqrt{ab} + 7\sqrt{ac} + 3\sqrt{bc}$ для неотрицательных чисел.

4. Докажите неравенство для положительных значений переменных

$$(ab + bc + ca)^2 > 3abc(a + b + c).$$

5. Докажите неравенство для положительных значений переменных

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 > a(b + c + d + e).$$

6. Положительные числа a, b, c удовлетворяют соотношению $ab + bc + ca = 1$. Докажите, что $\sqrt{a + \frac{1}{a}} + \sqrt{b + \frac{1}{b}} + \sqrt{c + \frac{1}{c}} \geqslant 2(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})$.