Неравенство о средних для двух переменных

Для любых положительных чисел a и b справедливы неравенства:

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geqslant \frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab} \geqslant \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}},$$

причем каждое из неравенств обращается в равенство, только когда числа a и b равны.

Эти выражения (слева направо) называются *среднее квадратическое, среднее арифметическое, среднее геометрическое, среднее гармоническое*.

Неравенство $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$ также называют *неравенством Коши* (оно, как правило, самое популярное).

1. Многие неравенства можно доказать, подставив удобные a и b в какое-нибудь из неравенств о средних (обратите внимание, мы можем подставлять вместо a и b **любые положительные выражения**, и неравенство будет оставаться верным. Поэтому если вы показали, что ваше неравенство – это неравенство о средних для каких-то двух выражений, вы доказали задачу.

Итак, докажите следующие неравенства для положительных чисел:

(a) $x^4+y^4 \geqslant 2x^2y^2$;

(b) $x+\frac{1}{x} \geqslant 2$;

(c) $x^3y+xy^3 \geqslant 2x^2y^2$;

(d) $1 \geqslant \frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$, если $xy=1$;

(e) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \geqslant \frac{4}{x+y}$;

(f) $4 \geqslant \sqrt{7-x}+\sqrt{x+1}$.

2. Найдите наименьшее значение выражений при положительных переменных:

(a) $(64+81x^4)/x^2$;

(b) $\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1000-x}, x<1000$.

3. **(Неравенство о средних для 4 переменных)** Докажите, что:

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geqslant \sqrt[4]{abcd}$$

4. Докажите, что

(a) $(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}) \geqslant 4$;

(b) $(a+b+c+d)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}) \geqslant 16$.

Иногда полезно сделать из одного слагаемого — несколько (или наоборот).

5. Произведение чисел $a_1, a_2, \ldots a_n$ равно 1. Докажите следующие неравенства:
   (a) $(1+a_1)(1+a_2)\cdot\ldots\cdot(1+a_n) \geqslant 2^n$;
   (b) $(3+a_1)(3+a_2)\cdot\ldots\cdot(3+a_n) \geqslant 4^n$.

6. Найдите наименьшее значение выражения $a^3 + \frac{3}{a}$.