Одно и то же свойство делимости

- Если $a + b \mathrel{\vdots} m$ и $a \mathrel{\vdots} m$, то $b \mathrel{\vdots} m$.
- Если $a - b \mathrel{\vdots} m$ и $a \mathrel{\vdots} m$, то $b \mathrel{\vdots} m$.
- Если $a \cdot b \mathrel{\vdots} m$ и $(a, m) = 1$, то $b \mathrel{\vdots} m$.
- Если $a \cdot b \mathrel{\vdots} m$ и m – простое, то хотя бы один из множителей делится на m.
- Если $a \mathrel{\vdots} m, b \mathrel{\vdots} m$, то $k \cdot a + l \cdot b \mathrel{\vdots} m$ для любых целых k, l.

1. Известно, что $11a + 8b \mathrel{\vdots} 13$. Покажите, что на 13 делится и
(a) $2a + 5b$; **(b)** $8a + 7b$; **(c)** $3a + b$.

2. Известно, что $(a + 143b)$ четное, а $(143a + b)$ делится на 3. Покажите, что $(a + 143b)(143a + b)$ делится на 36.

3. Даны такие два числа, что их сумма и произведение делятся на 16. Покажите, что их сумма кубов делится на 256.

4. **(a)** Докажите признак делимости на 8.
(b) Докажите, что если последние n цифр числа образуют число, которое делится на 2^n, то и само число делится на 2^n.

5. При каких натуральных n дробь **(a)** $\dfrac{2n+1}{4n+3}$ **(b)** $\dfrac{5n+2}{8n-2}$ сократима?

6. Докажите, что для нечётных чисел a, b и c имеет место равенство

$$\text{НОД}\left(\frac{b+c}{2}, \frac{a+c}{2}, \frac{a+b}{2}\right) = \text{НОД}(a, b, c).$$

7. На доске написаны пять натуральных чисел. Оказалось, что сумма любых трёх из них делится на каждое из остальных. Обязательно ли среди этих чисел найдутся четыре равных?

8. Покажите, что если для натуральных x, y выполнено $(x + 5)(5x + 24) = y^2$, то $x + 5$ — квадрат.

9. Натуральные числа a и b таковы, что $a+b > 2$ и $a^2+b \mathrel{\vdots} b^2+a$. Докажите, что b^2+a — составное число.