

Разнобой по графам для молодцов

1. В стране несколько городов, некоторые пары городов соединены беспосадочными рейсами одной из N авиакомпаний, причём из каждого города есть ровно по одному рейсу каждой из авиакомпаний. Известно, что из каждого города можно долететь до любого другого (возможно, с пересадками). Из-за финансового кризиса был закрыт $N - 1$ рейс, но ни в одной из авиакомпаний не закрыли более одного рейса. Докажите, что по-прежнему из каждого города можно долететь до любого другого.
2. В стране 15 городов, некоторые из них соединены авиалиниями, принадлежащими трём авиакомпаниям. Известно, что даже если любая из авиакомпаний прекратит полеты, можно будет добраться из каждого города в любой другой (возможно, с пересадками), пользуясь рейсами оставшихся двух компаний. Какое наименьшее количество авиалиний может быть в стране?
3. В некотором государстве было 2002 города, соединённых дорогами так, что если запретить проезд через любой из городов, то из каждого из оставшихся городов можно добраться до любого другого. Каждый год король выбирает некоторый несамопересекающийся циклический маршрут и приказывает построить новый город, соединить его дорогами со всеми городами выбранного маршрута, а все дороги этого маршрута закрыть за ненадобностью. Через несколько лет в стране не осталось ни одного несамопересекающегося циклического маршрута, проходящего по ее городам. Докажите, что в этот момент количество городов, из которых выходит ровно одна дорога, не меньше 2002.
4. В некоторой стране два вида транспорта: автомобильный и железнодорожный. Причем из каждого города выходит одинаковое число дорог того и другого вида, и от любого города можно добраться в любой другой. Джеймсу Бонду не разрешается пользоваться одним и тем же видом транспорта два раза подряд. Докажите, что он сможет добраться из любого города в любой, не нарушая запрета
5. В стране несколько городов, некоторые пары городов соединены двусторонними беспосадочными авиалиниями, принадлежащими k авиакомпаниям. Известно, что каждые две линии одной авиакомпании имеют общий конец. Докажите, что все города можно разбить на $k + 2$ группы так, что никакие два города из одной группы не соединены авиалинией.