

Деревья

Определение. Граф называется **деревом**, если:

1. он *связен* и *не имеет циклов*;
2. между любыми двумя его вершинами которого *существует единственный путь*;
3. он *связен* и *при удалении любого ребра перестаёт быть связным*;
4. он *связен* и количество его *ребер* на 1 меньше количества *вершин*.

Определение. Вершина дерева называется **висячей**, если ее степень равна 1.

1. (a) Докажите, что если верно 1, то верно и 2.
(b) Докажите, что если верно 2, то верно и 3.
(c) Докажите, что если верно 3, то верно и 1.
2. (a) Покажите, что в дереве есть хотя бы одна висячая вершина.
(b) Покажите, что в дереве вершин на 1 больше, чем ребер.
3. (a) В графе степени четырёх вершин равны 3, пяти вершин – 4, двух вершин – 1. Может ли он быть деревом?
(b) Степени вершин дерева равны 5, 4, 3, 2, 1, 1, ..., 1. Сколько в этом графе висячих вершин?
4. (a) **Лемма об остовном дереве.** Покажите, что в любом графе можно удалить несколько ребер так, чтобы оставшийся граф был деревом.
(b) Покажите, что если верно 4, то верно и 1.

ВАЖНЫЙ ВЫВОД. В связном графе на n вершинах хотя бы $n - 1$ ребро! Это очень поможет в следующих задачах, как и выделение остовного дерева.

5. В Супермегии N городов. Президент издал указ связать их железными дорогами в единую сеть. Каждая ветка связывает два города, не пересекаясь с другими ветками. Докажите, что всего понадобится не менее $N - 1$ веток.
6. Можно ли раскрасить рёбра куба в два цвета так, чтобы по рёбрам каждого цвета можно было пройти из любой вершины в любую другую?
7. Невод браконьера представляет собой прямоугольную сетку 100×100 клеток. После каждой поимки инспектор рыбоохраны обрезает в неводе одну веревочку (указанную браконьером), так, чтобы невод не распался на части. Сколько задержаний может выдержать браконьер до разрушения своего инструмента?