

Связный граф и антиграф

Определение. Граф называется **связным**, если от каждой его вершины есть какой-то путь по ребрам до любой другой вершины этого графа.

Определение. Говорят, что граф распадается на **компоненты связности** – несколько связных подграфов, таких, что между разными подграфами нет ребер.

Определение. Если в графе заменить все отсутствия ребер на ребра, а все ребра на отсутствие ребер, получится **антиграф** этого графа. Если нарисовать ребра и графа, и антиграфа, получится полный граф.

Часто бывает полезно пойти от противоположного – подумать, а могло ли быть в графе несколько компонент связности?

1. В Матвертикалии есть несколько городов, некоторые из которых соединены дорогами. При чем оказалось, что из каждого города ведет ровно 100 дорог, и из каждого города можно попасть в каждый, возможно, по нескольким дорогам. Покажите, что если перекрыть любую дорогу, все равно из каждого города можно будет доехать в каждый.
2. На кружке супер8 каждый знает не меньше 10 одноклассников. Преподаватель сообщил объявление некоторому ученику и попросил распространить ее среди знакомых ему одноклассников. Так ученик и сделал, причем более того, каждый ученик, узнавший новость, сделал то же самое. Докажите, что рано или поздно все ученики получают объявление.
3. В Матвертикалии 12 станций метро, соединённых 56 перегонами (две станции соединяются не более чем одним перегонем). Докажите, что метрополитен связан.

А иногда полезно увидеть в задачах антиграф.

4. (а) В Матвертикалии 50 городов. Между каждыми двумя городами можно проехать либо суперпоездом, либо мегапоездом. Докажите, что, пользуясь только одним из видов поездов, можно объездить всю страну.
(б) Каких графов на 50 вершинах больше: связных или несвязных?
5. В параллельной вселенной есть страна Горизоналия, очень похожая на Вертикалию: у каждого города есть «двойник». Однако, если в Вертикалии два города соединены дорогой, то в Горизоналии дороги между этими городами нет, а если города в Вертикалии соединены не были, они соединены дорогой в вертикалии. Паша в Вертикалии понял, что не может проехать из Суперска в Мегск, сделав менее двух пересадок. Покажите, что в Горизоналии он может проехать из любого города в другой, сделав не более двух пересадок.
6. На проведение Матпраздника пришло 30 восьмиклассников. Оказалось, что любые пять человек можно посадить за круглый стол с условием, чтобы каждый знал обоих своих соседей. Какое минимальное количество пар знакомых могло быть среди них?

И еще две задачи.

7. В Матвертикалии больше 445 городов. Город Суперск соединен дорогами с 444 городами, а каждый город, кроме Суперска, соединён дорогами ровно с 8 городами. В Матвертикалии от каждого города можно добраться в любой другой. Докажите, что можно закрыть на ремонт

половину дорог, идущих из Суперска, так, что возможность попасть из каждого города в любой другой сохранится.

8. В Матвертикалии $2n$ городов, некоторые из которых соединены дорогами, причём от каждого города ведет не менее чем n дорог.
- (a) Докажите, что если закрыть на ремонт любые $n - 1$ дорог, то всё равно из любого города можно будет добраться в любой другой.
- (b) Укажите все случаи, когда связность нарушается при закрытии n дорог.