[Школа №444]

[*2020-2021*] группа: супер8 *7 ноября 2020 г.*

Продолжение индукции для молодцов

Часто требуется доказать утверждение типа: *«Для каждого натурального n верно, что ...».* Такое утверждение можно рассматривать, как цепочку утверждений «Для $n = 1$ верно, что ...», «Для $n = 2$ верно, что ...» и т.д.

Метод математической индукции состоит в том, чтобы доказать первое из этих утверждений (называемое **БАЗОЙ** или основанием индукции), что обычно достаточно просто сделать, а затем доказать **ШАГ** (или **переход**) индукции: «Если верно утверждение с номером k, то верно утверждение с номером $(k+1)$».

Если верна база индукции и верен шаг индукции, то все утверждения верны.

Внимание! Иногда бывает удобно проводить ШАГ немного иначе и пользоваться **всеми** предыдущими результатами, а не только предыдущим: "предположим, что все утверждения с номерами от 1 до k верны, тогда докажем, что верно и $k+1$.

Алгебра

1. **Неравенство Бернулли.** $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$ при $x > -1, n \geqslant 0$.
2. $$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}.$$
3. Докажите, что если для некоторого x число $\frac{1}{x} + x$ — целое, то $\frac{1}{x^n} + x^n$ тоже целое для всех натуральных n.

Теория чисел

4. Докажите, что $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ делится на 9.
5. Докажите, что $4^n + 15n - 1$ делится на 9.
6. Докажите, что число $111\ldots11$ (243 единицы) делится на 243.

Комбинаторика

7. На полке стоит 55 томов собрания сочинений В. И. Ленина. За раз разрешается взять несколько подряд идущих томов и переставить их в обратном порядке. Докажите, что такими операциями можно расставить тома по порядку.
8. Выпуклый многоугольник разрезан непересекающимися диагоналями на равнобедренные треугольники. Докажите, что в этом многоугольнике найдутся две равные стороны.
9. На поле $3 \times n$ лежат n яблок, n груш и n апельсинов, по одному фрукту в ячейке. Доказать, что можно поменять местами фрукты в каждой строке так, чтобы в каждом столбце было по одному фрукту каждого вида.