

Метод математической индукции

- Из квадрата 1024×1024 вырезали угловую клетку. Докажите, что полученную фигуру можно разрезать на «уголки» из трёх клеток.
- Головоломка «Ханойские башни» представляет собой N дисков, нанизанных в порядке уменьшения размеров на один из трех колышков. Требуется переместить всю башню на другой колышек, перенося каждый раз только один диск и не помещая больший диск на меньший. Докажите, что головоломка имеет решение.
- Докажите, что $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$.
- Несколько прямых делят плоскость на части. Доказать, что можно раскрасить эти части в белый и чёрный цвет так, чтобы соседние части (имеющие общий отрезок границы) были разного цвета

Часто требуется доказать утверждение типа: «Для каждого натурального n верно, что ...». Такое утверждение можно рассматривать, как цепочку утверждений

«Для $n = 1$ верно, что ...», «Для $n = 2$ верно, что ...» и т.д.

Метод математической индукции состоит в том, чтобы доказать первое из этих утверждений (называемое **БАЗОЙ** или основанием индукции), что обычно достаточно просто сделать, а затем доказать **ШАГ** (или **переход**) индукции: «Если верно утверждение с номером n , то верно утверждение с номером $(n + 1)$ ».

Если верна база индукции и верен шаг индукции, то все утверждения верны.

- Докажите тождества по индукции:

$$(a) \quad 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2};$$

$$(b) \quad 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

$$(c) \quad \left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}.$$

- Тыкву разрезали прямолинейными разрезами на несколько кусков. Оказалось, что одна сторона у ножа была грязная. Докажите, что всегда найдется хотя бы один чистый кусок.
- Однажды осенью маленький мальчик плохо порешал геометрию и был проклят: каждый день теперь он рисует треугольник и делит его на несколько частей несколькими прямыми. Проклятье спадет, если ему удастся сделать так, чтобы среди этих частей не было треугольников. Докажите, что проклятье никогда не спадет.
- Дух Перфекционизма приходит, если на столе стоят ровно 2^n стаканов с равным количеством воды. Ребята взяли 2^n стаканов с водой. Разрешается взять любые два стакана и уровнять в них количества воды, перелив часть воды из одного стакана в другой. Докажите, что с помощью таких операций ребята могут вызвать Дух Перфекционизма.
- Докажите, что после окончания однокругового турнира по теннису его участников можно выстроить в ряд так, что каждый выиграл у следующего за ним в этом ряду.