Лемма о хороводах

Важный прием в графах – это идти, идти, идти по ребрам, пока не случится что-то плохое.

1. **Лемма о хороводах**. В графе каждой вершина имеет степень 2. Покажите, что этот граф – объединение непересекающихся циклов.

2. **(a)** У каждого джентльмена города М у каждого есть ровно два неприятеля среди других джентльменов. Покажите, что джентльменов всегда можно разбить на 3 общества так, чтобы в каждом обществе никто не враждовал.
   (b) У каждого джентльмена ровно 1 неприятель и ровно 1 друг. Докажите, что тогда можно разбить джентльменов на 2 общества, где внутри которых нет вражды и дружбы.

3. На кружке 20 школьникам было предложено 20 задач. Каждый школьник решил две задачи и каждую задачу решили ровно двое из них. Докажите, что можно так организовать разбор задач, чтобы каждый школьник рассказал одну задачу и все задачи были разобраны.

4. **(a)** У Вани есть 40 конфет 20 видов, по две конфеты каждого вида. Ваня достал 20 коробочек и положил по 2 конфеты в каждую коробочку. Докажите, что он может достать по одной конфете из каждой коробочки так, чтобы все конфеты были разными.
   (b) Докажите, что количество этих способов – какая-то степень двойки.

5. **(a)** В классе 30 учеников, у каждого ровно по 2 друга. Докажите, что можно организовать не менее 10 дежурств так, чтобы дежурили по двое друзей, и никто не дежурил дважды.
   (b) Всегда ли можно организовать 11 дежурств?

6. В однокруговом турнире каждый участник играет не более одной игры в день, но по окончанию должна сыграть с каждой другой командой один раз. После нескольких дней турнира организаторы заметили интересный факт: любых 5 участников можно так усадить за круглый стол, что каждый их них уже играл с соседями. Докажите, что в таком случае организаторы могут так придумать расписание игр, что турнир завершится через 3 дня.

7. Страна Матвертикалия состоит из 100 изолированного острова, пронумерованных от 1 до 100. У короля Матвертикалии есть любимое число a, некратное 101. По приказу короля в Матвертикалии построили мосты между островами по следующему правилу: два острова с номерами x и y, соединены мостами, ровно тогда, когда
   если $x \cdot a \underset{101}{\equiv} y$ или $y \cdot a \underset{101}{\equiv} x$. Таким образом, острова матвертикалии разбились на группы, внутри которых от каждого острова можно добраться до каждого, а от любых двух городов из разных групп добраться по мостам никак нельзя.
   (a) Покажите, что все группы содержат одинаковое количество городов, назовем это число t.
   (b) Покажите, что $a^t \underset{101}{\equiv} 1$.
   (c) Докажите **Малую Теорему Ферма**: для любого простого числа p и числа a, некратного p выполнено $a^{p-1} \underset{101}{\equiv} 1$.