

Алгоритм Евклида

По умолчанию все числа в листочке являются целыми.

Определение. Наибольшим общим делителем (НОД) чисел a и b называется наибольшее натуральное число d такое, что a и b делятся на d . Обозначение: $d = (a, b)$.

1. Найдите **(а)** $(78, 42)$; **(б)** $(427, 990)$; **(с)** $(73! + 74!, 75!)$; **(д)** $(21a + 14, 15a + 10)$.
2. У доктора Пилюлькина есть двухчашечные весы, гирьки 2020 г и 73 г, много песка и много терпения. Докажите, что он сможет отмерить на этих весах 49 г ценного лекарства.
3. На столе лежит клетчатая шоколадка 56×12 . Каждую минуту от неё отламывают квадратик наибольшего возможного размера и кладут в тарелку. Какая сторона будет у самого маленького квадратика в тарелке?
4. Докажите, что **(а)** любой делитель a и b является делителем $a - b$ и b ; **(б)** любой делитель $a - b$ и b является делителем a и b ; **(с)** $(a - b, b) = (a, b)$.
(д) если $a = bq + r$, то $(a, b) = (b, r)$.

Алгоритм Евклида — способ найти НОД двух натуральных чисел, последовательно заменяя пару исходных чисел на пару из меньшего числа и остатка от деления большего на меньшее.

$$\begin{aligned}
 a &= b \cdot q_1 + r_1 \\
 b &= r_1 \cdot q_2 + r_2 \\
 r_1 &= r_2 \cdot q_3 + r_3 \\
 &\dots \\
 r_{n-1} &= r_n \cdot q_{n+1} + r_{n+1} \\
 r_n &= r_{n+1} \cdot q_{n+2} + 0
 \end{aligned}$$

5. Найдите с помощью алгоритма Евклида: **(а)** $(233, 144)$; **(б)** $(\frac{11 \dots 1}{51}, \frac{11 \dots 1}{85})$; **(с)** $(2^{123} - 1, 2^{222} - 1)$.
6. Докажите, что $(5a + 3b, 13a + 8b) = (a, b)$.
7. **(а)** Докажите, что числа $n + 4$ и $2n + 7$ взаимно просты при любом натуральном n .
(б) Докажите, что дробь $\frac{21n + 4}{14n + 3}$ несократима при любом натуральном n .
8. Докажите, что алгоритм Евклида находит НОД пары чисел за конечное число шагов.