Метод математической индукции. Повторение

Часто требуется доказать утверждение типа: *«Для каждого натурального n верно, что ...»*. Такое утверждение можно рассматривать, как цепочку утверждений «Для $n = 1$ верно, что ...», «Для $n = 2$ верно, что ...» и т.д.

Метод математической индукции состоит в том, чтобы доказать первое из этих утверждений (называемое **базой** или основанием индукции), что обычно достаточно просто сделать, а затем доказать **шаг** (или **переход**) индукции: «Если верно утверждение с номером k, то верно утверждение с номером $(k + 1)$».

Если верна база индукции и верен шаг индукции, то все утверждения верны.

Разбор: Докажите тождество $1 + 2 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$;
Докажите, что $6^{2n+1} + 1$ делится на 7;

1. Докажите тождества *методом математической индукции*:

- **(a)** $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$.
- **(b)** $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;
- **(c)** $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + ... + (n-1) \cdot n = \dfrac{(n-1)n(n+1)}{3}$;
- **(d)** $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$;
- **(e)** $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + ... + n \cdot n! = (n+1)! - 1$;

2. Докажите с помощью индукции, что

- **(a)** $n^3 - n$ делится на 3;
- **(b)** $n^3 + 11n$ делится на 6;
- **(c)** $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ делится на 9;
- **(d)** $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ делится на 7;
- **(e)** $5 \cdot 2^{3n+1} + 3^{3n+2}$ делится на 19;
- **(f)** $3^{2n+2} + 8n - 9$ делится на 16;
- **(g)** $2^{5n+3} + 5^n \cdot 3^{n+2}$ делится на 17;