

Разнобой

Комбинаторика

1. Сколькими способами можно переставить буквы в слове КРОКОДИЛ?
2. Рота состоит из трёх офицеров, шести сержантов и 60 рядовых. Сколькими способами можно выделить из них отряд, состоящий из офицера, двух сержантов и 20 рядовых?

Графы

3. В классе 30 человек. Может ли быть так, что 9 из них имеют по 3 друга (в этом классе), 11 – по 4 друга, а 10 – по 5 друзей?
4. В стране 15 городов, каждый из которых соединён дорогами не менее, чем с семью другими. Докажите, что из каждого города можно добраться до любого другого (возможно, проезжая через другие города).
5. В графе степени двух вершин равны 5, пяти вершин — 2, двух вершин — 1. Может ли он быть деревом?

Теория чисел

6. Найдите остаток от деления:
(a) $2020 \cdot 2021 \cdot 2022$ на 11;
(b) $2017 \cdot 2016 \cdot 2015 + 2019 \cdot 2020 \cdot 2021$ на 2018;
(c) 6^{2020} на 7;
(d) 3^{2020} на 7.
7. Докажите, что $n^5 - n^3$ делится на 8 для любого n .

Индукция

8. Доказать, что

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} = 1 - \frac{1}{n}.$$

9. На поле $3 \times n$ лежат n яблок, n груш и n апельсинов, по одному фрукту в ячейке. Доказать, что можно поменять местами фрукты в каждой строке так, чтобы в каждом столбце было по одному фрукту каждого вида.