

Деревья

Определение. Граф называется *связным*, если от любой вершины можно добраться до любой другой по ребрам.

Циклом в графе называется замкнутый путь, не проходящий ни по какому ребру графа два раза.

Определение. *Деревом* называется:

- Связный граф без циклов.
- Граф, между любыми двумя вершинами которого существует единственный путь.
- Связный граф, который при удалении любого ребра перестает быть связным.
- Связный граф, количество ребер которого на 1 меньше количества вершин.

Висячей вершиной называется вершина степени 1.

0. Докажите, что эквивалентны определения под номерами:

(a) 1 и 2; (b) 1 и 3; (c) 1 и 4.

0. Докажите, что в каждом дереве из более чем одной вершины есть хотя бы две висячие вершины.

1. В графе степени четырёх вершин равны 3, пяти вершин — 4, двух вершин — 1. Может ли он быть деревом?

2. Существует ли дерево на 9 вершинах, в котором 2 вершины имеют степень 2?

3. Степени вершин дерева равны 5, 4, 3, 2, 1, 1, ..., 1. Сколько в этом графе висячих вершин?

4. **Лемма о существовании остовного дерева (скелета).** Докажите, что из каждого связного графа можно удалить некоторое число ребер так, чтобы получилось дерево.

5. Существует ли граф, у которого есть два остовных дерева без общих ребер?

6. В Супермегии N городов. Президент издал указ связать их железными дорогами в единую сеть. Каждая ветка связывает два города, не пересекаясь с другими ветками. Докажите, что всего понадобится не менее $N - 1$ веток.

7. Невод браконьера представляет собой прямоугольную сетку 100×100 клеток. После каждой поимки инспектор рыбоохраны обрезает в неводе одну веревочку (указанную браконьером), так, чтобы невод не распался на части. Сколько задержаний может выдержать браконьер до разрушения своего инструмента?

8. Можно ли раскрасить рёбра куба в два цвета так, чтобы по рёбрам каждого цвета можно было пройти из любой вершины в любую другую?

9. В марсианском метро с любой станции можно проехать на любую другую. Докажите, что можно закрыть на ремонт некоторую станцию и запретить проезд через неё так, что по-прежнему можно будет с любой оставшейся станции проехать на любую другую.