Метод математической индукции

0. Из квадрата 1024×1024 вырезали угловую клетку. Докажите, что полученную фигуру можно разрезать на «уголки» из трёх клеток.

0. Головоломка **«Ханойские башни»** представляет собой N дисков, нанизанных в порядке уменьшения размеров на один из трех колышков. Требуется переместить всю башню на другой колышек, перенося каждый раз только один диск и не помещая больший диск на меньший. Докажите, что головоломка имеет решение.

0. Докажите, что $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$.

0. Несколько прямых делят плоскость на части. Доказать, что можно раскрасить эти части в белый и чёрный цвет так, чтобы соседние части (имеющие общий отрезок границы) были разного цвета

Часто требуется доказать утверждение типа: *«Для каждого натурального n верно, что ...»*. Такое утверждение можно рассматривать, как цепочку утверждений «Для $n = 1$ верно, что ...», «Для $n = 2$ верно, что ...» и т.д.

Метод математической индукции состоит в том, чтобы доказать первое из этих утверждений (называемое **БАЗОЙ** или основанием индукции), что обычно достаточно просто сделать, а затем доказать **ШАГ** (или **переход**) индукции: «Если верно утверждение с номером n, то верно утверждение с номером $(n + 1)$».

Если верна база индукции и верен шаг индукции, то все утверждения верны.

1. Докажите тождества по индукции:

(a) $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$;

(b) $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

(c) $(1 - \frac{1}{4})(1 - \frac{1}{9}) \ldots (1 - \frac{1}{n^2}) = \frac{n+1}{2n}$.

2. Торт разрезали прямолинейными разрезами на несколько кусков. Оказалось, что одна сторона у ножа была грязная. Докажите, что всегда найдется хотя бы один чистый кусок.

3. Треугольник разбит на несколько частей несколькими прямыми. Докажите, что хотя бы одна из частей является треугольником.

4. На столе стоят 2^n стакана с водой. Разрешается взять любые два стакана и уровнять в них количества воды, перелив часть воды из одного стакана в другой. Докажите, что с помощью таких операций можно уравнять воду в стаканах.

5. Докажите, что после окончания однокругового турнира по теннису его участников можно выстроить в ряд так, что каждый выиграл у следующего за ним в этом ряду.