Сравнения.

Определение. Разделить целое число a на натуральное число b — значит найти такие целые числа q и r, что $a = bq + r$. При этом требуется выполнение неравенства $0 \leqslant r < b$. Числа q и r называются неполным частным и остатком при делении a на b.

Примеры.
(a) Число 122 дает остаток 2 при делении на 10: $122 = 12 \cdot 10 + 2$;
(b) Число -11 дает остаток 1 при делении на 3: $-11 = 3 \cdot (-4) + 1$.

Мысль. Было бы гораздо удобнее, если бы можно было как-то легко обозначать, что числа a и b дают равные остатки при делении на какое-то число m.

> **Определение 1.** Говорят, что числа a и b **сравнимы по модулю** m, если их разность делится на m.
> **Определение 2.** Говорят, что числа a и b **сравнимы по модулю** m, если они дают одинаковые остатки при делении на m.
> **Обозначение.** Это записывается так: $a \underset{m}{\equiv} b$.

0. Докажите, что **Определение 1** и **Определение 2** – одно и то же:
(a) Если a и b дают одинаковые остатки при делении на m, то $a - b$ делится на m;
(b) Если $a - b$ делится на m, то a и b дают одинаковые остатки при делении на m.

Вывод. Слова «числа a и b дают равные остатки при делении на m» можно заменять на «a и b сравнимы по модулю m» в устной речи и на «$a \underset{m}{\equiv} b$» в письменной.

Примеры:
$122 \underset{10}{\equiv} 2$;
$(-11) \underset{3}{\equiv} 1$.

> **Свойства сравнений:**
> · Если $a \equiv b \ mod\ m$, то $a + c \equiv b + c \ mod\ m$.
> · Если $a \equiv b \ mod\ m$, то $ac \equiv bc \ mod\ m$.
> · Если $a \equiv b \ mod\ m$, а $b \equiv c \ mod\ n$, то $a \equiv c \ mod\ m$.
> · Если $a \equiv b \ mod\ m$, а $c \equiv d \ mod\ n$, то $a + c \equiv b + d \ mod\ m$.
> · Если $a \equiv b \ mod\ m$, а $c \equiv d \ mod\ n$, то $ac \equiv bd \ mod\ m$.
> · Если $a \equiv b \ mod\ m$, то $a^k \equiv b^k \ mod\ m$.

1. Найдите остаток от деления:
(a) $1001 \cdot 1002 \cdot 1003 + 2001 \cdot 2001 \cdot 2002 \cdot 2003 \cdot 2004$ на 1000;
(b) $2015 \cdot 2016 \cdot 2017 \cdot 2018 \cdot 2019$ на 11;
(c) $2017 \cdot 2016 \cdot 2015 + 2019 \cdot 2020 \cdot 2021$ на 2018;
(d) $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot 101 + 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot ... \cdot 102$ на 103.

2. Найдите остаток от деления:
(a) 8^{2019} на 7; **(b)** 6^{2019} на 7; **(c)** 3^{2019} на 7.

3. Найдите остаток от деления:

(a) $9^{2019} + 13^{2019}$ на 11;

(b) $7^{2012} + 9^{2015}$ на 10;

(c) $9^{2018} + 13^{2018}$ на 11.

4. Числа 2146, 1991 и 1805 сравнимы по модулю n. Найдите все возможные n.

5. Докажите, что $1^{45} + 2^{45} + \ldots + 38^{45}$ делится на 13.

6. Докажите, что число $5^{2019} + 18$ составное.

7. Пусть $3x + 7y \equiv 1\ (mod\ 11)$.

(a) Докажите, что $3x + 40y \equiv 1\ (mod\ 11)$;

(b) Найдите остаток от деления $14x - 15y$ на 11;

(c) Найдите остаток от деления $6x + 3y$ на 11.