

## Графы.

**Определение.** *Степенью вершины* называют количество ребер, выходящих из данной вершины.

**Теорема.** Число ребер в графе равно половине от суммы степеней вершин.

**Лемма о рукопожатиях.** В любом графе число вершин с нечётной степенью чётно.

*Задача с отбора.* В 8ой класс из другой школы пришёл новый мальчик Женя. В начале года он никого не знал. Через месяц учитель Леонид Андреевич выяснил, что у каждого школьника кроме Жени ровно 5 друзей. Докажите, что и Женя нашел себе друзей, если всего в 8ом классе 20 детей.

1. Существует ли 8-вершинный граф, степени которого равны:  
(а) 7, 7, 5, 4, 4, 2, 2, 1; (б) 7, 3, 3, 3, 3, 2, 2, 1; (с) 7, 5, 5, 5, 4, 3, 2, 2?
2. В графе из каждой вершины выходит по 7 ребер. Может ли в нём быть 2020 рёбер?
3. На пару пришло 13 человек. Может ли случиться так, что каждая девочка знакома ровно с тремя из присутствующих на паре мальчиков, а каждый мальчик ровно с пятью девочками?
4. На клетчатом листе закрасили 25 клеток. Может ли каждая из них иметь нечётное число закрашенных соседей?
5. Докажите, что в любой компании найдутся два человека, у которых в этой компании равное число знакомых.
6. В Матвертикалии 10 крупных городов и 17 маленьких. Из каждого маленького города ведет 5 дорог к крупным городам, а из каждого крупного – к 9 маленьким. Докажите, что между следующими городами есть путь по дорогам матвертикалии:  
(а) Мегполис и Супергород – крупные города.  
(б) Мегск и Суперск – маленькие города.  
(с) Мегполисом и Мегском.

**Посчитайте двумя способами**

7. В школе каждый семиклассник дружит с 5 восьмиклассниками, а каждый восьмиклассник – с 7 семиклассниками. Кого в школе больше: восьмиклассников или семиклассников?
8. Может ли случиться, что в компании из 11 девочек и 10 мальчиков все девочки знакомы с разным числом мальчиков, а все мальчики – с одним и тем же числом девочек?