

Остатки

Мысль №1. Вычисляя остаток от деления некоторого арифметического выражения на некоторое число a , можно заменять числа на их остатки при делении на a . Например, найдем остаток от деления числа $16 \cdot 17 \cdot 19$ на 3. Он будет таким же, как у $1 \cdot 2 \cdot 1 = 2$.

Мысль №2. А можно заменять и не на остатки! Если какое-то другое число удобнее и остаток у него правильный, смело меняйте на него. Пример: ищем остаток при делении числа 20^{14} на 7. Можно было бы заменить 20 на 6, но это дает мало пользы. Зато если заменить 20 на -1 , получится $(-1)^{14} = 1$.

1. Найдите остаток $7778 \cdot 7779 \cdot 7780 \cdot 7781$ на 7.
2. Найдите остаток 11^{11} при делении на 12.
3. Найдите остаток $7^{2020} + 9^{2019}$ при делении на 10.
4. Докажите, что при любом натуральном n число $16^{n+2} + 23^{n+1} + 37^n$ делится на 7.

Остатки квадратов чисел

Тот факт, что среди остатков квадратов встречаются не все возможные остатки, часто помогает в решении задач.

5. Какие остатки может давать квадрат натурального числа при делении на 3? На 4? На 8? на 9? Нарисуйте четыре таблички с двумя строками (остаток числа и его квадрата).
6. (а) Докажите, что для нечетного n число $n^2 + 3$ делится на 4.
(б) Докажите, что $n^3 + 5$ не делится на 9.
(с) Докажите, что $n^5 - n^3$ делится на 8.
7. Натуральные числа x, y, z таковы, что $x^2 + y^2 = z^2$. Докажите, что хотя бы одно из них делится на 3.
8. (а) Известно, что $a^2 + b^2 \div 3$. Докажите, что оно делится и на 9;
(б) Известно, что $a^2 + b^2 \div 7$. Докажите, что оно делится и на 49.