

Метод математической индукции. Повторение

Часто требуется доказать утверждение типа: «Для каждого натурального n верно, что ...». Такое утверждение можно рассматривать, как цепочку утверждений «Для $n = 1$ верно, что ...», «Для $n = 2$ верно, что ...» и т.д.

Метод математической индукции состоит в том, чтобы доказать первое из этих утверждений (называемое **базой** или основанием индукции), что обычно достаточно просто сделать, а затем доказать **шаг** (или **переход**) индукции: «Если верно утверждение с номером k , то верно утверждение с номером $(k + 1)$ ».

Если верна база индукции и верен шаг индукции, то все утверждения верны.

Разбор: Докажите тождество $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$;
Докажите, что $6^{2n+1} + 1$ делится на 7;

1. Докажите тождества методом математической индукции:

(a) $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$.

(b) $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

(c) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + (n-1) \cdot n = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$;

(d) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$;

(e) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$;

2. Докажите с помощью индукции, что

(a) $n^3 - n$ делится на 3;

(b) $n^3 + 11n$ делится на 6;

(c) $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ делится на 9;

(d) $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ делится на 7;

(e) $5 \cdot 2^{3n+1} + 3^{3n+2}$ делится на 19;

(f) $3^{2n+2} + 8n - 9$ делится на 16;

(g) $2^{5n+3} + 5^n \cdot 3^{n+2}$ делится на 17;