Неравенства

Для любого числа x верно неравенство $x^2 \geqslant 0$.
$\dfrac{a+b}{2}$ — среднее арифметическое двух чисел. $\sqrt{ab}$ — среднее геометрическое ($a, b \geqslant 0$).
Неравенство Коши (или неравенство о средних): $\dfrac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$, при $a, b \geqslant 0$

1. Докажите неравенства:
- **(a)** $\dfrac{x^2+y^2}{2} \geqslant xy$ при любых x, y
- **(b)** $x + \dfrac{1}{x} \geqslant 2$ при $x \geqslant 0$
- **(c)** $2(x^2+y^2) \geqslant (x+y)^2$ при любых x, y
- **(d)** Докажите, что $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} \geqslant \dfrac{4}{x+y}$ при $x, y > 0$
- **(e)** $1 + x \geqslant 2\sqrt{x}$ при $x \geqslant 0$

Свойства неравенств: Неравенства можно складывать и для положительных чисел перемножать.
Если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$.
Если $a, b, c, d \geqslant 0$, $a > b$ и $c > d$, то $ac > bd$.
Пример. Докажите неравенство: $x^2 + 2xy + 2y^2 + 2y + 1 \geqslant 0$.
Представим левую часть в виде $(x+y)^2 + (y+1)^2$. Заметим, что $(x+y)^2 \geqslant 0$ и $(y+1)^2 \geqslant 0$, сложив данные неравенства получаем требуемое.

2. Докажите неравенства:
- **(a)** $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \geqslant 2xy + 2xz + 2yz$ при любых x, y, z
- **(b)** $(a^2+b^2)(a^2+c^2)(b^2+c^2) \geqslant 8a^2b^2c^2$ при $a, b, c \geqslant 0$
- **(c)** $x^2 + y^2 + 1 \geqslant xy + x + y$ при любых x, y
- **(d)** $\frac{ab}{c} + \frac{ac}{b} + \frac{bc}{a} \geqslant a + b + c$ при $a, b, c \geqslant 0$
- **(e)** $(ab+bc+ca)^2 \geqslant 3abc(a+b+c)$ при $a, b, c \geqslant 0$
- **(f)** $ab + bc + ca \geqslant a\sqrt{bc} + b\sqrt{ca} + c\sqrt{ab}$ при $a, b, c \geqslant 0$
- **(g)** $\left(\dfrac{x+y+z}{3}\right)^2 \geqslant \dfrac{xy+yz+xz}{3}$ при любых $x, y, z > 0$