Метод математической индукции.

-1. Доказать, что квадрат **(a)** 4×4; **(b)** 8×8; **(c)** 16×16; с вырезанной угловой клеткой можно разрезать на уголки из трех клеток.

0. Головоломка **«Ханойские башни»** представляет собой N дисков, нанизанных в порядке уменьшения размеров на один из трех колышков. Требуется переместить всю башню на другой колышек, перенося каждый раз только один диск и не помещая больший диск на меньший. Докажите, что головоломка имеет решение для
(a) $N = 4$;
(b) $N = 5$.

Часто требуется доказать утверждение типа: *«Для каждого натурального n верно, что ...»*. Такое утверждение можно рассматривать, как цепочку утверждений «Для $n = 1$ верно, что ...», «Для $n = 2$ верно, что ...» и т.д.

Метод математической индукции состоит в том, чтобы доказать первое из этих утверждений (называемое **базой** или основанием индукции), что обычно достаточно просто сделать, а затем доказать **шаг** (или **переход**) индукции: «Если верно утверждение с номером k, то верно утверждение с номером $(k + 1)$».

Если верна база индукции и верен шаг индукции, то все утверждения верны.

1. Решите задачу **-1** для квадрата $2^n \times 2^n$ для произвольного n.

2. Решите задачу **0** для произвольного N,

3. Показать, что любую сумму, начиная с 8 копеек, можно уплатить монетами в 3 и 5 копеек.

4. На плоскости нарисован треугольник. Его пересекли N прямыми, докажите, что среди полученных частей есть треугольник.

5. Докажите тождества *методом математической индукции*:
(a) $1 + 2 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$
(b) $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$.
(c) $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

6. Торт разрезали прямолинейными разрезами на несколько кусков. Оказалось, что одна сторона у ножа была грязная. Докажите, что всегда найдется хотя бы один чистый кусок.

7. Плоскость поделена на области несколькими прямыми. Докажите, что области можно раскрасить в два цвета, чтобы соседние области имели разный цвет.