

Вспоминаем графы.

Граф – это множество точек (для удобства изображения — на плоскости) и попарно соединяющих их линий (не обязательно прямых). Точки называются **вершинами**, линии – **рёбрами**. В графе важен только факт наличия связи между двумя вершинами. От способа изображения этой связи структура графа не зависит.

Степень вершины – количество выходящих из неё рёбер.

Разбор. В стране Матвертикалия 9 городов с названиями 1, 2, 3 ... 9. Между двумя городами проведена дорога, если двузначное число образованное из двух данных цифр делится на 17. Можно ли из города 1 проехать в город 2?

1. В стране Матвертикалия 90 городов с названиями 10, 11, 12 ... 99. Между двумя городами проведена дорога, если одно из двух чисел делится на другое. Можно ли из города 10 проехать в город (a) 96; (b) 11?
2. Вася и Петя рисуют пятилапых пауков, которые взяли лапки друг друга. Петя нарисовал 7 пауков, а Вася 8, так что ни одной свободной лапки не осталось. Кто из мальчиков ошибся?
3. В классе, в котором Евгений Сергеевич ведёт занятия, 24 ученика. Среди них есть Петя, у которого 13 друзей в классе и Вася, у которого 11 друзей. Докажите, что есть (a) один ученик; (b) два ученика, которые дружат с обоими мальчиками,
4. Евгений Сергеевич вывез свой класс на природу и проводит для детей веревочный курс. Если два ребенка дружат, то они связывают свои руки веревкой. Сколько веревок потребуется Евгению Сергеевичу, если у Пети 13 друзей, у Васи — 11, а у всех остальных по 2 друга? (Один ребенок может связать свои руки с любым количеством других детей, на каждую связь требуется новая веревка).
5. Евгений Сергеевич продолжил свой веревочный курс, он раздал детям веревки и попросил связать ноги с другими детьми. Получилось так, что у каждого мальчика ноги связаны с 5 детьми, а у девочки с 7. Сколько веревок раздал Евгений Сергеевич, если мальчиков 15, а девочек 9?
6. **Важная задача!** Сумма степеней всех вершин графа — чётное число, равное удвоенному количеству рёбер графа.
7. В Матвертикали участвуют 25 школ. Некоторые школы соседствуют друг с другом, может ли так оказаться, что у всех школ 1, 3 или 5 соседей?
8. Петин папа решил на даче сделать систему декоративных прудов, соединенных каналами. Он хочет сделать 3 больших пруда, 5 средних и 4 маленьких, так, чтобы каждый большой соединялся каналами с шестью другими, средний с тремя и маленький с двумя. Получится ли у него сделать такую систему?
9. **Лемма о рукопожатиях.** В любом графе количество вершин с нечетными степенями четно.