

Графы

Определение. Будем называть *графом* множество точек (*вершин*), некоторые из которых соединены между собой линиями (*рёбрами*). Любые две вершины могут быть соединены не более, чем одним ребром.

Определение. Граф называется *связным*, если от любой его вершины можно по рёбрам добраться до любой другой.

Определение *Степенью вершины* называется количество выходящих из этой вершины рёбер.

1. Лемма о рукопожатиях. (Важный факт)

(а) Сумма степеней всех вершин равна удвоенному числу ребер.

(б) В конечном графе число вершин нечетной степени – четно. Это утверждение называется *леммой о рукопожатиях*.

Задачи

2. В городе Маленьком 15 телефонов. Можно ли их соединить проводами так, чтобы каждый был соединен ровно с пятью другими?
3. У короля 19 баронов-вассалов. Может ли оказаться, что у каждого вассального баронства 1, 5 или 9 соседних баронств?
4. (а) В стране 444 города, из каждого выходит по 7 дорог. Сколько всего дорог в стране?
(б) Может ли в стране, где из каждого города выходит по 7 дорог, быть ровно 100 дорог?
5. Граф состоит из 7 вершин и 7 рёбер. Известно, что у двух вершин степень 2, а у трёх — степень 3. Докажите, что в этом графе есть изолированная вершина (то есть такая, которая не соединена ребром ни с одной другой. Степень этой вершины равна нулю).
6. На пару пришло 17 человек. Может ли случиться так, что каждая девочка знакома ровно с тремя из присутствующих на паре мальчиков, а каждый мальчик ровно с пятью девочками?
7. Докажите, что число людей, когда-либо живших на Земле и сделавших нечетное число рукопожатий, четно.
8. Можно ли нарисовать на плоскости 9 отрезков так, чтобы каждый пересекался ровно с тремя другими?