

Доказательство от противного

Пример 1. По кругу лежит 55 шариков двух цветов. Докажите, что найдутся два соседних шарика одного цвета.

Доказательство. Предположим, что двух соседних шариков нет. Тогда цвета шариков чередуются. Из этого следует, что 1-й, 3-й, 5-й, ..., 53-й, 55-й по счёту шарики имеют одинаковый цвет. Получаем противоречие: 1-й и 55-й шарики должны иметь разный цвет, поскольку они соседние. Таким образом, найдутся два соседних шарика одного цвета.

Пример 2. 34 пассажира едут в автобусе, который делает 9 остановок, причем на них никто не заходит. Докажите, что обязательно будут хотя бы 2 остановки, на которых вышло одинаковое число пассажиров.

Доказательство. Предположим, что нет двух остановок, на которых вышло одинаковое число пассажиров. Тогда на всех остановках вышло разное число людей. Значит, вышло не менее $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36$ человек, а людей было всего 34. Противоречие. Следовательно, хотя бы две такие остановки есть.

1. На балу все дамы танцевали первый тур вальса, при этом каждый военный танцевал с блондинкой. Докажите, что каждая брюнетка танцевала первый тур вальса со штатским.
2. В компании из семи мальчиков каждый имеет среди остальных не менее трёх братьев. Докажите, что все семеро — братья.
3. В лаборатории в течение месяца родились хомячки. Всего родилось 65 малышей. Докажите, что среди них есть трое, родившиеся в один день.
4. На русско-французской встрече не было представителей других стран. Суммарное количество денег у французов оказалось больше суммарного количества денег у россиян, и суммарное количество денег у женщин оказалось больше суммарного количества денег у мужчин. Обязательно ли на встрече была француженка?
5. В вершинах куба расставлены числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Докажите, что есть ребро, числа на концах которого отличаются не менее, чем на 3.
6. На двух карточках записаны четыре различные цифры — по одной с каждой стороны карточки. Может ли оказаться так, что всякое двузначное число, которое можно сложить из этих карточек, будет простым? **(а)** Можно **(б)** Нельзя переворачивать цифры, т. е. делать из цифры 6 цифру 9 и наоборот.
7. За круглым столом сидят 25 мальчиков и 25 девочек. Докажите, что у кого-то из сидящих за столом
(а) соседи одного пола;
(б) оба соседа — мальчики.
8. Узлы квадратной сетки покрашены в два цвета. Докажите, что найдётся прямоугольный треугольник с одноцветными вершинами.