

## Графы - 2. Лемма о рукопожатиях

**Определение 1.** *Степенью вершины* называется количество выходящих из этой вершины рёбер.

Сумма степеней вершин любой компоненты связности равна удвоенному количеству рёбер.

1. Сколько рёбер в полном графе **(а)** на 4 вершинах?  
**(b)** На 10 вершинах?  
**(c)** На  $n$  вершинах?
2. В конференции участвовало несколько человек. Каждый был знаком с одинаковым числом участников. Все здоровались за руку со всеми своими знакомыми по разу. Всего было сделано 18 рукопожатий. Чему могло быть равно число участников конференции?
3. В деревне 15 фонарных столбов: 10 из них соединены проводами с пятью другими каждый, а ещё пять — с шестью другими каждый. Сколько проводов натянуто между столбами в деревне?
4. **Лемма о рукопожатиях.**  
В конечном графе число вершин нечетной степени – четно. Это утверждение называется *леммой о рукопожатиях*.
5. Существуют ли пять таких слов таких, чтобы каждое имело хотя бы одну общую букву ровно с тремя другими?
6. У Софы 5 друзей среди одноклассников. У остальных её одноклассников 4, 6 или 8 друзей. И только у новичка Славы всего один друг. Докажите, что Софа может отправить Славе записку, если каждый будет передавать записку одному из своих друзей.
7. В стране Тройка от Столицы можно добраться до любого другого города не более, чем за 3 пересадки. При этом из каждого города, кроме Дальнего выходит ровно по 3 дороги, а из Дальнего — 2 дороги. Какое наибольшее число городов (включая Столицу) может быть в этой стране?
8. Несколько деревень связаны между собой дорогами, причем из каждой можно проехать в любую другую. Из деревни Четверкино выходит 4 дороги, из Пятеркино — 5, из Шестеркино — 6, из Семеркино — 7, из Восьмеркино — 8, а из всех остальных выходит четное число дорог. После того, как была закрыта одна из дорог, появились две такие деревни, что от одной невозможно добраться до другой. Докажите, что и от Пятеркино до Семеркино теперь тоже не доберешься.
9. Можно ли подобрать компанию где у каждого ее члена было бы ровно пять друзей, а у любых двух - ровно два общих друга?