

## Разложение на простые множители

**Основная теорема арифметики.** Каждое натуральное число  $n$  можно представить в виде произведения степеней простых множителей  $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$  единственным образом с точностью до перестановки множителей.

1. На планете Матвертикалия неделя состоит из нескольких суток, сутки — из нескольких часов, час — из нескольких минут, минута — из нескольких секунд. Известно, что в одних сутках 1001 секунда, а в одной неделе 715 минут. Найдите, сколько на Матвертикалии секунд в часе, если минут в часе меньше, чем часов в сутках. Слово «несколько» означает «больше одного».
2. Артём умножил число на сумму его цифр и получил 2008. Какое число он загадал?
3. Ярослав утверждает, что может получить число 10 000 000 000, перемножив два числа, в записи которых нет нулей. Не ошибается ли он?
4. Произведение возрастов Олиных братьев равно 1664, причём старший брат вдвое старше младшего. Сколько у Оли братьев? Какого они возраста?
5. (a) Числа от 3 до 6 разбили на две группы так, что произведение чисел в первой группе нацело делится на произведение чисел во второй. Какое наименьшее значение может быть у частного от деления первого произведения на второе?  
(b) То же для чисел от 1 до 10.
6. Павел нашел наименьшее натуральное число, которое делится на 1, ... 100. А Кирилл нашел наименьшее число, которое делится на числа 51, ..100. Докажите, что числа у Павла и Кирилла совпадают.
7. Докажите, что у уравнения  $y^2 = 2x^2$  нет решений в натуральных числах.
8. На доске выписаны числа 1, 2, ..., 100. На каждом этапе одновременно стираются все числа, не имеющие среди нестертых чисел делителей, кроме себя самого. Например, на первом этапе стирается только число 1. Какие числа будут стерты на третьем этапе? А на последнем этапе?
9. Софья выбрала 50 различных чисел из чисел от 1 до 2020. Может ли оказаться, что произведение любой пары из них является точным квадратом?