

Принцип Дирихле

1. Знаменитый ученый Дирихле очень любил рассаживать кроликов по клеткам. Всего у него было 10 клеток и 21 кролик. Какие из следующих утверждений верны (то есть при данных условиях выполняются всегда):
 - (a) в любой клетке кто-то сидит,
 - (b) есть клетка, в которой сидит ровно 2 кролика,
 - (c) есть клетка, в которой сидит хотя бы 3 кролика,
 - (d) есть клетка, в которой сидит хотя бы 4 кролика,
 - (e) в любой клетке не меньше 2 кроликов,
 - (f) в любой клетке меньше 20 кроликов,
 - (g) есть клетка, в которой меньше 3 кроликов,
 - (h) есть клетка, в которой меньше 2 кроликов,
 - (i) есть две клетки, в которых меньше 3 кроликов?
2. Закончите предложения:
 - (a) В пяти тарелках лежат шесть конфет. Тогда найдется тарелка, в которой лежит ...
 - (b) В 17 чуланах живут 19 привидений. Значит найдется чулан, в котором живет ...
 - (c) В 10 спичечных коробках лежит 21 монетка. Тогда найдется коробок, в котором лежит ...
 - (d) Вася в течение 3 дней съел 100 шоколадок. Обязательно найдется день, в который Вася съел не более...

Принцип Дирихле. Если рассадить $k + 1$ кроликов по k клеткам, найдется клетка, в которой будет сидеть хотя бы 2 кролика.

3. На кружках в 444 школе учится 444 ребенка. Докажите, что хотя бы двое из них отмечают день рождения в один и тот же день.
4. В лесу растет миллион ёлок. Известно, что на каждой из них не более 600000 иголок. Докажите, что есть две ёлки с одинаковым количеством иголок.
5. В ковре размером 4×4 метра моль проела 15 дырок. Докажите, что из него можно вырезать коврик размером 1×1 метр, не содержащий внутри себя дырок. (Дырки считайте точечными.)
6. Обязательно ли среди двадцати пяти монет (т.е. монет достоинством 1, 2, 5 или 10 руб.) найдётся семь монет одинакового достоинства?
7. В Москве проживает более 10000000 людей. На голове у каждого человека не может быть более 300000 волос. Докажите, что наверняка найдутся 34 москвича с одинаковым числом волос на голове.