Произведение отрезков

1. **(a)** В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ вписан тогда и только тогда, когда $OA \cdot OC = OB \cdot OD$.
   (b) На сторонах угла с вершиной P выбраны точки A, B, C и D (A и B на одной стороне угла, C и D на другой). Докажите, что точки A, B, C, D лежат на одной окружности тогда и только тогда, когда $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.

2. Доказать, что, если на основании AC равнобедренного треугольника ABC взять произвольную точку M, то $BC^2 - BM^2 = AM \cdot CM$.

3. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) проведена биссектриса AM. На луче CA отложен отрезок CN, равный BM. Докажите, что точки A, B, M и N лежат на одной окружности.

4. Две окружности пересекаются в точках A и B; MN — общая касательная к ним. Докажите, что прямая AB делит отрезок MN пополам.

5. Прямая OA касается окружности в точке A, а хорда BC параллельна OA. Прямые OB и OC вторично пересекают окружность в точках K и L. Докажите, что прямая KL делит отрезок OA пополам.

6. В параллелограмме $ABCD$ диагональ AC больше диагонали BD; M — такая точка диагонали AC, что четырёхугольник $BCDM$ вписанный. Докажите, что прямая BD является общей касательной к описанным окружностям треугольников ABM и ADM.

7. Даны окружность S и точки A и B вне её. Для каждой прямой ℓ, проходящей через точку A и пересекающей окружность S в точках M и N, рассмотрим описанную окружность треугольника BMN. Докажите, что все эти окружности имеют общую точку, отличную от точки B.

8. Через центр I вписанной в треугольник ABC окружности проведена прямая, перпендикулярная прямой AI и пересекающая прямую BC в точке M. Из точки I на прямую AM опущен перпендикуляр ID. Докажите, что точки A, B, C и D лежат на одной окружности.

9. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках M и N. Докажите, что если вершины A и C некоторого прямоугольника $ABCD$ лежат на окружности ω_1, а вершины B и D — на окружности ω_2, то точка пересечения диагоналей прямоугольника лежит на прямой MN.

Добавка

10. Дан треугольник ABC. Обозначим через M середину стороны AC, а через P — середину отрезка CM. Описанная окружность треугольника ABP пересекает сторону BC во внутренней точке Q. Докажите, что $\angle ABM = \angle MQP$.

11. Биссектриса AD треугольника ABC пересекает его описанную окружность в точке T. Пусть ω — окружность с центром в точке T и радиусом TC. Прямая ℓ, проходящая через точку D, пересекает ω в точках K и N. Докажите, что $\angle KAD = \angle NAD$.

12. Трапеция $ABCD$ с основаниями AB и CD вписана в окружность Ω. Окружность ω проходит через точки C, D и пересекает отрезки CA, CB в точках A_1, B_1 соответственно. Точки A_2 и B_2 симметричны точкам A_1 и B_1 относительно середин отрезков CA и CB соответственно. Докажите, что точки A, B, A_2 и B_2 лежат на одной окружности.

13. Дан остроугольный треугольник ABC. Точки M и N — середины сторон AB и BC соответственно, точка H — основание высоты, опущенной из вершины B. Описанные окружности треугольников AHN и CHM пересекаются в точке P ($P \neq H$). Докажите, что прямая PH проходит через середину отрезка MN.

14. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BB_1, CC_1. Через A и C_1 проведены две окружности, касающиеся BC в точках P и Q. Докажите, что точки A, B_1, P, Q лежат на одной окружности.

15. Окружность ω касается сторон угла BAC в точках B и C. Прямая ℓ пересекает отрезки AB и AC в точках K и L соответственно. Окружность ω пересекает ℓ в точках P и Q. Точки S и T выбраны на отрезке BC так, что $KS||AC$ и $LT||AB$. Докажите, что точки P, Q, S и T лежат на одной окружности.