Полуинвариант

– Не нравится мне это место, — пробурчал Гном.
– А оно и не обязано никому нравиться, — пожал плечами Полуэльф.

Обсуждение

1. На доске написаны числа 100, 200 и 300. За один ход разрешается заменить числа a, b, c на числа $2a-b$, $2b-c+1$, $2c-a+2$. Можно ли получить на доске числа 1, 2, 3?
2. В двух коробках лежат по 9 шариков. За один ход можно убрать из любой коробки 1 шарик или убрать 1 шарик из левой коробки и положить 9 шариков в правую. Докажите, что ходы рано или поздно закончатся.
3. На доске выписана последовательность, состоящая из крестиков и ноликов. За один ход разрешается взять любые k ($k=1,\dots,n$) подряд идущих знака таких, что эта последовательность начинается с крестика, а все остальные знаки в ней — нолики (допускается последовательность из одного крестика), и инвертировать её (заменить крестик на нолик и нолики на крестики). Докажите, что ходы рано или поздно закончатся.
4. По окружности выписано несколько натуральных чисел. Между каждыми двумя соседними числами вписывается их наибольший общий делитель. Затем старые числа стираются и над оставшимися проделывают ту же операцию. Докажите, что через несколько шагов все числа на окружности станут равными.

Задачи для самостоятельного решения

1. В квадрате 20×20 стоят 400 ненулевых **(a)** целых; **(b)** вещественных чисел. Можно изменить знак у всех чисел, стоящих в одном столбце или в одной строке. Докажите, что за конечное число таких операций можно добиться того, что сумма чисел, стоящих в любой строке или в любом столбце, будет неотрицательной.
2. На доске написаны 3 различных натуральных числа. За ход можно взять одно из крайних чисел (наибольшее или наименьшее) и заменить на среднее арифметическое, геометрическое или гармоническое его с каким-то другим из чисел (при условии, что это среднее — натурально, и все числа остаются различными). Докажите, что удастся сделать лишь конечное число ходов (если при любом возможном ходе набор чисел не меняется, то будем считать, что ходить больше нельзя).
3. (ОММО, 2016, 9–10) Карлсон написал дробь 5/8. Малыш может:
   - прибавлять любое натуральное число к числителю и знаменателю одновременно;
   - умножать числитель и знаменатель на одно и то же натуральное число.

   Сможет ли Малыш с помощью этих действий получить дробь, равную 3/5?
4. На доску можно писать только положительные правильные обыкновенные дроби. Петя написал несколько дробей. Их можно изменять:
   - в одной дроби увеличить на 1 и числитель, и знаменатель,
   - сократить дробь на любое целое число,
   - у любых двух дробей поменять местами числители так, чтобы обе дроби остались правильными.

   Вася к одной из дробей применил первую операцию. Может ли Петя указанными операциями вернуться к прежнему списку дробей?
5. В колоде часть карт лежит рубашкой вниз. Время от времени Петя вынимает из колоды пачку из одной или нескольких подряд идущих карт, в которой верхняя и нижняя карты лежат рубашкой вниз, переворачивает всю пачку как одно целое и вставляет её в то же место колоды (если «пачка» состоит лишь из одной карты, то требуется только, чтобы она лежала рубашкой вниз). Докажите, что в конце концов все карты лягут рубашкой вверх, как бы ни действовал Петя.
6. Несколько ребят стоят по кругу. У каждого есть некоторое количество конфет. Сначала у каждого чётное количество конфет. По команде каждый передает половину своих конфет стоящему справа. Если после этого у кого-нибудь оказалось нечётное количество конфет, то ему извне добавляется одна конфета. Это повторяется много раз. Доказать, что настанет время, когда у всех будет поровну конфет.
7. В каждой из 2020 стран правит либо партия правых, либо партия левых. Каждый год в одной из стран может поменяться власть. Это может произойти в том случае, если в большинстве граничащих с данной страной стран правит не та партия, которая правит в данной стране. Докажите, что смены правительств не могут продолжаться бесконечно.
8. У менялы на базаре есть много ковров. Он согласен взамен ковра размера $a\times b$ дать либо ковёр размера $\frac{1}{a}\times\frac{1}{b}$, либо два ковра размеров $c\times b$ и $\frac{a}{c}\times b$ (при каждом таком обмене число c клиент может выбрать сам). Путешественник рассказал, что изначально у него был один ковёр, стороны которого превосходили 1, а после нескольких таких обменов у него оказался набор ковров, у каждого из которых одна сторона длиннее 1, а другая — короче 1. Не обманывает ли он?
9. На экране компьютера сгенерирована некоторая конечная последовательность нулей и единиц. С ней можно производить следующую операцию: набор цифр «01» заменять на набор цифр «1000». Может ли такой процесс замен продолжаться бесконечно или когда-нибудь он обязательно прекратится?