Отражение ортоцентра

Ты меня не знаешь,
ты всего лишь отраженье.
Средство есть лишь одно —
сгинь на дно.

Король и Шут — Отражение

1. Пусть H — ортоцентр треугольника ABC. Докажите, что
(a) точка M, симметричная H относительно прямой AC, лежит на окружности, описанной около треугольника ABC;
(b) точка N, симметричная H относительно середины стороны AC, лежит на окружности, описанной около треугольника ABC;
(c) BN — диаметр окружности, описанной около треугольника ABC;
(d) радиусы окружностей, описанных около треугольников ABC, AHB, BHC и AHC, равны между собой.

2. На окружности зафиксированы точки A и B. Точка C движется по дуге окружности. Докажите, что точка пересечения H высот треугольника ABC движется по окружности, симметричной описанной окружности треугольника ABC относительно стороны AB, если
(a) треугольник ABC остроугольный;
(b) если угол C тупой;
(c) если угол A тупой.

3. **Теорема Эйлера.** Докажите, что в любом треугольнике основания высот, середины сторон и середины отрезков, соединяющих ортоцентр с вершинами, лежат на одной окружности (*окружности девяти точек*).

4. В треугольнике ABC с $\angle A = 45°$ проведены высоты BB_1 и CC_1. Докажите, что B_1C_1 — диаметр окружности девяти точек треугольника ABC.

5. Докажите, что расстояние от центра описанной около треугольника окружности до его стороны вдвое меньше расстояния от ортоцентра до противоположной вершины.

6. В треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1. Пусть R, R_1, R_2 — радиусы окружностей, описанных около треугольников ABC, A_1B_1C, AA_1B_1 соответственно. Докажите, что $R^2 = R_1^2 + R_2^2$.

7. Высоты AD и CE остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Окружность, описанная около треугольника ACH, пересекает стороны AB и BC в точках F и G соответственно. Докажите, что $FG = 2DE$.

8. На сторонах AB и BC треугольника ABC нашлись такие точки M и N, отличные от вершин, что $MC = BC$ и $NA = AB$. Точка P симметрична точке B относительно прямой AC. Докажите, что PB является биссектрисой угла MPN.

Дополнительные задачи

9. Докажите, что A, C, H и проекция H на медиану треугольника (точка R), выходящую из вершины B, лежат на одной окружности. *Эта окружность симметричная описанной окружности треугольника относительно середины отрезка AC.*

10. Через вершину B остроугольного треугольника ABC проведено две окружности, которые касаются стороны AC в точках A и C и пересекаются вторично в точке R.
(a) Докажите, что точка R лежит на медиане треугольника, выходящей из вершины B. (*Что нужно делать с медианой?*)
(b) Докажите, что A, C, R и ортоцентр треугольника H лежат на одной окружности.

11. Высоты остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Описанная окружность треугольника ABH пересекает окружность, построенную на отрезке AC как на диаметре, в точке $K \neq A$. Докажите, что прямая CK делит отрезок BH пополам.

12. Касательная к описанной окружности треугольника ABC ($AB > BC$), восстановленная в вершине A, пересекает прямую BC в точке M. Пусть X отражение точки C относительно прямой AM, а Y отражение точки A относительно центра M. Докажите, что точки A, B, X и Y лежат на одной окружности.

13. Про треугольник ABC известно, что $AB > AC > BC$. На стороне AB выбрана точка D такая, что $CD = BC$. Кроме это, отмечена середина стороны AC точка M. Докажите, что если $\angle BAC = 2\angle ABM$, то $BD = AC$.

14. На гипотенузе AC прямоугольного треугольника ABC выбрана точка X, а на её продолжении за C точка Y так, что $AX = XY$. Перпендикуляр к BX, восставленный в точке B, пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке D. Прямые AD и BX пересекаются в точке E. Докажите, что ортоцентр треугольника AEY лежит на BD.