

Клетки и кролики

Принцип Дирихле. Если рассадить $nk + 1$ кроликов по k клеткам, найдется клетка, в которой будет сидеть хотя бы $n + 1$ кролик.

Задаки для разбора

1. Обязательно ли среди двадцати пяти монет (т.е. монет достоинством 1, 2, 5 или 10 руб.) найдётся семь монет одинакового достоинства?

Задаки для решения

1. В Москве проживает более 10 000 000 людей. На голове у каждого человека не может быть более 300 000 волос. Докажите, что наверняка найдутся 34 москвича с одинаковым числом волос на голове.
2. Докажите, что в аудитории найдутся 2 человека, у которых одинаковое количество друзей среди присутствующих (дружба бывает только взаимной).
3. Докажите, что из любых $n + 1$ целых чисел можно выбрать два числа, разность которых нацело делится на n .
4. В каждой клетке таблицы 3×3 написали либо 1, либо 2, либо 3. Могли ли все суммы по трём столбцам, трём строкам и трём диагоналям оказаться различными?
5. Какое максимальное число ладей можно поставить на шахматную доску 8×8 так, чтобы никакие две не били друг друга?
6. В кинотеатре 7 рядов по 10 мест. Группа из 50 человек сходила на утренний и вечерний сеансы. Докажите, что найдутся два человека, которые и утром, и вечером сидели на одном ряду.
7. Каждая клетка таблицы 2020×2020 покрашена в один из 2019 цветов. За ход можно взять строку или столбец и, если там есть две клетки одного цвета, перекрасить эту строку или столбец в этот цвет. Всегда ли можно за несколько ходов покрасить всю таблицу в один цвет?
8. Даны 8 различных натуральных чисел, каждое из которых не больше 15. Докажите, что среди их попарных разностей (положительных) найдутся хотя бы 3 одинаковые.
9. Вокруг круглого озера через равные промежутки растут 2019 деревьев: 1009 сосен и 1010 ёлок. Докажите, что обязательно найдется дерево, рядом с которым растёт сосна и с другой стороны от которого через одно дерево тоже растёт сосна.
10. (a) Можно ли покрыть квадрат 3×3 тремя квадратами 2.99×2.99 ?
(b) Какое наименьшее количество королей можно поставить на шахматную доску так, чтобы они все клетки доски? Считается, что король бьёт клетку, на которой стоит.