

## Формулки

Пора бы уже запомнить:

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) \quad (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \quad (x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2) \quad x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) \quad (x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

1. Два различных числа  $x$  и  $y$  (не обязательно целых) таковы, что  $x^2 - 2020x = y^2 - 2020y$ . Найдите сумму чисел  $x$  и  $y$ .
2. Найдите  $x^3 + y^3$ , если известно, что  $x + y = 5$  и  $x + y + x^2y + xy^2 = 2020$ .
3. (a) Докажите, что для вещественных  $x, y$  верно  $x^2 + y^2 \geq 2xy$   
(b) Докажите, что если  $1 \geq a$  и  $1 \geq b$ , то  $1 + ab \geq a + b$ .
4. Про ненулевые числа  $a, b, c$  известно, что  $\frac{a^2+c^2}{b^2+c^2} = \frac{a}{b}$ . Следует ли из этого, что  $\frac{a}{c} = \frac{c}{b}$ ?
5. Пусть  $x, y$  – два натуральных числа.  
(a) Известно, что  $x^2$  делится на  $x - y$ . Докажите, что  $y^2$  тоже делится на  $x - y$ .  
(b) Известно, что  $x^n$  делится на  $x - y$ . Докажите, что  $y^n$  тоже делится на  $x - y$ .
6. Про вещественные числа  $a, b, c$  известно, что  $a^2 + b = b^2 + c = c^2 + a$ . Найдите, чему равно  $a(a^2 - b^2) + b(b^2 - c^2) + c(c^2 - a^2)$ .
7. Разложите на множители выражение  $(b-c)^3 + (c-a)^3 + (a-b)^3$ .
8. Пусть  $a = b + 1$ . Докажите, что

$$a^{64} - b^{64} = (a^{32} + b^{32})(a^{16} + b^{16})(a^8 + b^8)(a^4 + b^4)(a^2 + b^2)(a + b)$$

9. Для положительных чисел  $a, b, c, d$  выполняются неравенства  $a \geq c + d$  и  $b \geq c + d$ . Докажите, что  $ad + bc - ab \leq 0$ .
10. Известно, что  $a + \frac{1}{a}$  – целое число (при этом число  $a$  не обязательно целое). Докажите, что  $a^3 + \frac{1}{a^3}$  тоже целое.
11. Известно, что  $a + b + c = 5$  и  $ab + bc + ac = 5$ . Чему может равняться  $a^2 + b^2 + c^2$ ?
12. Для вещественных чисел  $a \leq 1$  и  $b \leq -1$  докажите неравенство

$$a^2 - ab + b^2 + a - b - 1 \geq 0$$

13. (Всеросс, Окружной этап, 2008) Числа  $a, b, c$  таковы, что  $a^2(b + c) = b^2(a + c) = 2008$  и  $a \neq b$ . Найдите значение  $c^2(a + b)$ .